榆林學院
YULIN UNIVERSITY

教　案

数统 院系（部）

课程名称 高等数学

课程代码 S0409105(上)+S0409106(下)

课程性质 公共必修

任课教师 李晓焱

职　　称 讲师

授课对象 20级金融、资源

榆林学院
教务处

______至______学年　第______学期

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第一章　函数**

第一节　集合

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．理解集合、集合相等、区间、区域等相关概念;

2. 了解集合的交、并、差、补等运算;

3. 掌握区间和区域的表示.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 集合的运算，邻域的概念

难点： 邻域的概念

主要内容

第一节　集合

一、集合的概念

1. 集合的定义

集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体。通常用大写字母 A、B、C……等来表示，组成集合的各个事物称为该集合的元素。若事物 a 是集合 M 的一个元素，就记 $a\in M$（读 a 属于 M）；若事物 a 不是集合 M 的一个元素，就记 $a\notin M$ 或 $a\overline{\in} M$（读 a 不属于 M）；集合有时也简称为集.

注意：（1）对于一个给定的集合，要具有确定性的特征，即对于任何一个事物或元素，能够判断它属于或不属于给定的集合，二者必居其一.

（2）对于一个给定的集合，其中的元素应是互异的，完全相同的元素，不论数量多少，在一个集合里只算作一个元素，就是说，同一个元素在同一个集合里不能重复出现.

（3）若一集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集.

2. 集合的表示法

表示集合的方法，常见的有列举法和描述法两种.

列举法： 按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号{ }括起来，这种方法称为列举法.

例 方程 $x^2+2x-3=0$ 根的集合 A，可表示为　$A=\{-3,1\}$.

描述法： 若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，可表示为

$$M=\{x\mid x\text{具有性质 P}\},$$

例 由不等式 $x-3>2$ 的解构成的集合 A 可表示为　$A=\{x|x>5\}$.

全体自然数集记为 N,全体整数的集合记为 Z,全体有理数的集合记为 Q,全体实数的集合记为 R，以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集。

3. 集合间的基本关系

子集：集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若有 $x \in A$，必有 $x \in B$，就称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$,或 $B \supset A$(读 B 包含 A)。

显然：$N \subset Z \subset Q \subset R$.

集合相等：若 $A \subset B$,同时 $B \subset A$,就称 A、B 相等,记为 A=B。

空集 不含任何元素的集称为空集,记为 Φ,如：

$\{ x | x^2 + 1 = 0, x \in R \} = \Phi$,$\{ x : 2^x = -1 \} = \Phi$,空集是任何集合的子集,即 $\Phi \subset A$。

二、集合的运算

并运算 $A \bigcup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$

交运算 $A \bigcap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$

差运算 $A \setminus B = \{x \mid x \in A 或 x \notin B\}$

性质：（1）**交换律** $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$；

（2）**结合律** $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

（3）**分配律** $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$,

$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$

（4）**对偶律** $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$,$(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$

直积(笛卡儿乘积)：

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x, y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A \times B$，即

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

例如，$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R 且 y \in R\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$R \times R$ 常记作 R^2.

三、区间与邻域

1. 区间

有限区间：设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a, b)，即

$(a, b)=\{x|a<x<b\}$.

类似地有

$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间,

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$、$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间.

其中 a 和 b 称为区间 (a, b)、$[a, b]$、$[a, b)$、$(a, b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

无限区间：

$[a, +\infty) = \{x \mid a \le x\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid |x| < +\infty\}$.

区间在数轴上的表示:

2. 邻域： 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的领域，记作 $U(a)$ 。

设 δ 是任一正数，a 为某一实数，把数集{ x| |x-a | <δ}称为点 a 的 δ 邻域，记作 U（a, δ），即

$$U(a,\ \delta)=\{\ x|\ \ |x-a|\ <\delta\}$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.（图 1-8）

由于 a-δ<x<a+δ 相当于| x-a |<δ，因此

U(a, δ）={ x| a-δ<x<a+δ},也就是开区间(a-δ, a+δ)

因为| x-a |表示点 x 与点 a 间的距离，所以 U(a, δ）表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

例如: | x-2 |<1,即为以点 a=2 为中心，以 1 为半径的邻域。有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$

这里 0<|x-a|就表示 x ≠ a.

例如: 0<| x-2 |<1,即为以点 a=2 为中心,半径为 1 的去心邻域(1,2) $\cup$ (2,3).

讨论、思考：

1. 如果集合 A 有 n 个元素，问 A 有多少个子集？ A 的真子集有几个？

2. 写出 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集。

3. 按下列要求举例:

（1）一个有限集

（2）一个无限集

（3）一个空集

（4）一个集合是另一个集合的子集

作业：（课本） 习题 1—1（2,3,9,12,13）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 90 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型： √理论课 讨论课 实验课 练习课 其他

教学方式： √讲授 讨论 指导 其他

教学资源： √多媒体 模型 实物 挂图 音像 其他

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第一章　函数**

第二节　映射与函数

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解映射与函数概念，掌握有界函数、单调函数、奇偶函数、周期函数的特点；

2. 培养学生应用函数解决实际问题的能力；

3. 训练学生“通过建立简单应用问题中的函数关系式”解决实际问题的的数学思.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 映射与函数的概念。

难点： 复合映射。

主要内容

第二节　映射与函数

一、函数的概念

1. 映射的概念

定义　设X,Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一的元素y与之对应，则称f为X到Y的映射,记作f: $X\to Y$,其中y元素x（在映射f下）的像。并记作$f(x)$，即$y=f(x)$　而元素x称为元素y（在映射f下）的一个像；集合X称为映射f的定义域，记作D_f　,即$D_f=$X；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射f的值域，记作R_f或$f(X)$，即：　R .

$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

需要注意的问题:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素: 集合X, 即定义域$D_f=X$, 集合Y, 即值域的范围: $R_f=Y$；对应法则f, 使对每个$x\in X$, 有唯一确定的$y=f(x)$与之对应.

(2) 对每个$x\in X$, 元素x的像y是唯一的; 而对每个$y\in R_f$　, 元素y的原像不一定是唯一的; 映射f的值域R_f是Y的一个子集, 即$R_f\subset Y$, 不一定$R_f=Y$　.

满射：设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f = Y$， 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；

单射：若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；

双射：若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

二、 逆映射与复合映射

1. 逆映射 设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$ 适合 $f(x) = y$，于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

g：$D_f \to X$ 对每个 $y \in R_f$ ，规定 $g(y) = x$，这 x 满足 $f(x) = y$． 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$．

只有单射才存在逆映射.

2. 复合映射 设有两个映射 g：$X \to Y_1$ ，f：$Y_2 \to Z$，其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g(x)] \in Z$.显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \circ g$，即 $f \circ g$：$X \to Z$,即有 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

应注意的问题：

映射 g 和 f 构成复合映射的条件： g 的值域必须包含在 f 的定义域内， 否则，不能构成复合映射．由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的， $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义．即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 1 设有映射 g：$R \to [-1,1]$，对每个 $x \in R$， $g(x) = \sin x$，映射 f:$[-1,1] \to [0,1]$，对每个 $u \in [-1,1]$， $f(u)=\sqrt{1-u^2}$． 则映射 g 和 f 构成复映射 $f \circ g$：$R \to [0,1]$，对每个 $x \in R$，有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|.$$

三、 **函数**

1．函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每一个 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则（或关系）总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$．x 称为自变量为，y 称为因变量（或函数），数集 D 称为这个函数的定义域，而因变量 y 的变化范围 $f(D)$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

注：讲解自变量、因变量、对应规则、定义域、值域、函数值、几种常用的特殊函数.

2. 举例 1-7—1-11

四、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$．如果对区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时总有不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；若当 $x_1 < x_2$ 时总有不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对与任何 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零数 l，使得对于任意的 $x \in D$，有 $x \pm l \in D$，且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期．通常我们所说的周期指的是最小正周期.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I \subset D$，如果存在正数 M，使得对任意 $x \in I$，有 $|f(x)| \le M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

讨论、思考：

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，判断函数 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$ 的奇偶性及有界性。

（答 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}},x\in R$，奇函数，有界 $\left|f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}\right|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+3x^2}}\le 1$。）

2. 函数 f(x)=lg(x2-x-2)的定义域为 A，函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，则 A∩B=_______

3. 下列函数中，既是 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上的增函数，又是以 π 为周期的偶函数是（ ）

A y=|sinx| B y=|cosx| C y=|sin2x| D y=cos2x

作业：（课本） 习题 **1－2**（2,3,5,6）

参考资料（含参考书、文献等）： 《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 100 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型： √理论课 讨论课 实验课 练习课 其他
教学方式： √讲授 讨论 指导 其他
教学资源： √多媒体 模型 实物 挂图 音像 其他

授课时间	第 周 周 第 节	课时安排	**2**
授课题目(教学章、节或主题)：**第一章 函数** **第三节 复合函数和反函数 初等函数**			
教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）： 1．理解复合函数、反函数、基本初等函数和初等函数的概念； 2. 掌握基本初等函数的性质和图像； 3. 了解函数的四则运算运算.			

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 基本初等函数和初等函数的概念个性质

难点： 基本初等函数的性质

主要内容

第三节 复合函数和反函数 初等函数

一、 反函数

定义　设 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，因此，对 $\forall y \in W$，必 $\exists x \in D$，使得 $f(x)=y$，这样的 x 可能不止一个，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，按函数的概念，就得到一新函数 $x=\varphi(y)$，称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数。

注 1．反函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域为 W，值域为 D；

2. 由上讨论知，即使 $y=f(x)$ 为单值函数，其反函数却未必是单值函数，以后对此问题还作研究；

3. 在习惯上往往用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此将 $x=\varphi(y)$ 中的 x 与 y 对换一下，$y=f(x)$ 的反函数就变成 $y=\varphi(x)$，事实上函数 $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 是表示同一函数的，因为，表示函数关系的字母"φ"没变，仅自变量与因变量的字母变了，这没什么关系。所以说：若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，那么 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，且后者较常用；

4．反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形是对称于 $y=x$。

例如： 函数 $y=ax+b, y=x^2, y=x^3$ 的反函数分别为：

$x=\dfrac{y-b}{a}, x=\pm\sqrt{y}, x=y^{\frac{1}{3}}$ 或分别为 $y=\dfrac{x-b}{a}, y=\pm\sqrt{x}, y=x^{\frac{1}{3}}$。

二、复合函数

若 $y=f(u)\quad u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域内时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数。

例如 2. $y=\sqrt{u}\quad u=2+\sin x$ 可复合成 $y=\sqrt{2+\sin x}$

注意：$y=\sqrt{u}\quad u=\sin x-2$ 就不能复合。

2. $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看作是 $y=\arctan u$，$u=2^{v}$，$v=\sqrt{x}$ 复合成的复合函数。

三、函数的运算（和差积商运算）

设函数 f(x)，g(x)的定义域依次为 D 1，D 2，D=D 1∩D 2≠∅，则我们可以定义这两个函数的下列运算:

和(差)f ±g : (f ±g)(x)=f(x)±g(x)，x∈D;

积 f ·g : (f ·g)(x)=f(x)·g(x)，x∈D;

商 $\dfrac{f}{g}$: $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，x∈D\{x|g(x)=0}.

例 3 设函数 f(x)的定义域为(−1，1)，证明必存在(−1，1)上的偶函数 g(x)及奇函数 h(x)，使得 f(x)=g(x)+h(x).

分析 如果 f(x)=g(x)+h(x)，则 f(−x)=g(x)−h(x)，于是

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

证明 作 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 f(x)=g(x)+h(x)，

且
$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$
$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x).$$

四、初等函数

基本初等函数:

幂函数: $y=x^{\mu}$ ($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数);

指数函数: $y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$);

对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, 特别当 $a=e$ 时, 记为 $y=\ln x$);

三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$.

初等函数:

由常数和基本初等函数经过**有限次**的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用**一个式子表示**的函数, 称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2}\ , y=\sin^2 x,\ \ y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 本教材讨论的主要都是初等函数。

讨论、思考：

1. 下列函数能否复合为函数 $y=f[g(x)]$，若能，写出其解析式、定义域、值域.

(1) $y=f(u)=\sqrt{u},\ u=g(x)=x-x^2$

(2) $y=f(u)=\ln u,\ u=g(x)=\sin x-1$

2. 已知 $f(\tan x)=\sec^2 x+1$, 求 $f(x)$

作业：（课本） 习题 **1－3**（1，2，4，7，8）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 100 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型： √理论课 讨论课 实验课 练习课 其他
教学方式： √讲授 讨论 指导 其他
教学资源： √多媒体 模型 实物 挂图 音像 其他

授课时间	第　周　星期　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第一章　函数**

第四节　函数的建立

第五节　经济学中的常用函数

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 掌握经济学中常用的函数（需求函数、供给函数、总成本函数、总收益函数和总利润函数、库存函数）。

2. 会利用函数建立经济数学模型。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：需求函数、供给函数、总成本函数、总收益函数和总利润函数、库存函数

难点：建立数学模型

主要内容

第五节　经济学中的常用函数（函数的建立）

一、需求函数

市场对某种商品的需求量，主要受到该商品的价格的影响，通常降低商品的价格会使需求量增加，提高商品的价格会使需求量减少．在假定其它因素不变的条件下，市场需求量 P 可视为商品价格 Q 的函数，称为需求函数。记作 $Q=Q(P)$

例 1　设某电子产品的月销售量是价格的线性函数．当价格为 580 元时，每月售出 800 件；当价格为 680 元时，每月售出 600 件，试求线性需求函数。并求当商品售价为 620 元时的市场需求量。

解：设需求量为 P，价格为 Q, 由题意得，

$$\begin{cases} a-580b=800 \\ a-680b=600 \end{cases}$$

解得 $a=1960, b=2$，所以需求函数 Q=1960-2p,

当商品售价为 620 元时，市场需求量为

$$Q=1960-2\times 620=720\ (\text{件})）$$

常见的需求函数有以下几种类型：

1. 线性函数：$Q_d=-aP+b,(a>0)$

2. 指数函数：$Q_d = ae^{-bp},(a,b>0)$

3. 幂函数：$Q_d = kP^{-a},(a,k>0)$

二、供给函数

某种商品的市场供给量也受商品价格的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少，在假定其它因素不变的条件下，供给量 P 也可看成价格 S 的函数，称为供给函数，记作 $S=S(P)$

例 2 该电子产品开发商每月向商场供给量是价格的线性函数．当价格为 580 元时，每月提供 800 件；当价格为 680 元时，每月多提供 100 件，试求线性供给函数。并求当商品售价为 620 元时的市场供应量。

解 设供应量为 S，价格为 P，由题意得

$$\begin{cases} c+580d=800 \\ c+680d=900 \end{cases}$$

解得 $c=220,b=1$，所以需求函数 $S=220+P$。

当商品售价为 620 元时，市场供应量为 S=220＋620=840 （件）

常见的供给函数有以下几种类型：

1. 线性函数：$Q_s = aP+b,(a>0)$

2. 指数函数：$Q_s = ae^{bp},(a,b>0)$

3. 幂函数：$Q_s = kP^{a},(a,k>0)$

三、总成本函数

总成本由固定成本 C_0 和可变成本 C_q 两部分组成：

$$C(q)=C_0+C_1(q)$$

其中固定成本 C_0 与产量 q 无关，如厂房、设备费等；变动成本 $C_1(q)$ 随产量 q 的增加而增加，如原材料费等。

生产 q 个单位产品时的平均成本为：$\overline{C}=\dfrac{C(q)}{q}$

例 3 已知某种产品的总成本函数为 $C(q)=500+0.2q^2$，求当生产 100 个该产品时的

总成本和平均成本。

解：由题意，产量为 100 个时的总成本

$$C(100)=500+0.2\times 100^{2}=2500$$

求当生产 100 个该产品时的总成本和平均成本为

$$\overline{C}(100)=\frac{C(100)}{100}=25$$

四、总收入函数

总收入函数与产品的单价和产量或销售量有关。如果产品的单位售价为 p，销售量为 q，则总收入函数为 $R(q)=pq$，q 个单位产品时的平均收入为 $\overline{R}=\dfrac{R(q)}{q}$ 。

例 4 某商品的市场需求规律为 $q=p-6$，求销售 100 个商品时的总收入和平均收入。

解 总收入函数

$$R(q)=pq=(q+6)q=q^{2}+6q$$

当销售 100 个商品时的总收入为

$$R(100)=100^{2}+600=10600$$

当生产 100 个单位产品时的平均成本为

$$\overline{R}(100)=\frac{R(100)}{100}=106$$

五、总利润函数

总利润等于总收入与总成本的差，于是总利润函数为:

$$L(q)=R(q)+C(q)$$

例 5 已知某产品的成本函数为 $C(q)=2q^{2}-4q+9$，需求函数为 $q=8-p$ (p 为价格)，求该产品的利润函数, 并说明该产品的盈亏情况。

解 总收入函数

$$R(q)=pq=(8-q)q=-q^{2}-8q$$

所以利润函数为 $L(q)=R(q)-C(q)=-3q^{2}+12q-12$

又由 $L(q)=0$ 得盈亏平衡点为 $q=1$，$q=3$

当 $q>3$ 或 $q<1$ 时，$L(q)<0$；当 $1<q<3$ 时，$L(q)>0$

讨论、思考：

1. 在一条直线公路的一侧有 A、B 两村，其位置如图 1-1 所示，公共汽车公司欲在公路上建立汽车站 M. A、B 两**村各修**一条直线大道通往**汽车**站，设 CM=x(km)，试把 A、B 两村通往 M 的大道总长 y(km)表示为 x 的函数. 2. 设某商品的需求关系是 3Q+4P=100,求总收益和平均收益. 3. 某工厂生产某产品年产量为 x 台，每台售价为 250 元，当年产量在 600 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 600 台时，经广告宣传后又可多出售 200 台，每台平均广告费为 20 元，生产再多，本年就售不出去了。试建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的关系。 4. 某厂生产一批元器件，设计能力为日产 100 件，每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元,(1)试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数;（2）若每件售价 14 元，试写出总收入函数;（3）试写出利润函数。 **作业：**（课本） 习题 1-4（1，3，6）1-5（1,2,3,）
参考资料（含参考书、文献等）： 《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 5 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第一章　函数**

习题课

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。

2. 理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性定义。

3. 理解复合函数、分段函数、反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及图形。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数的概念、性质，复合函数、分段函数、反函数及隐函数的概念，基本初等函数的性质及图形

难点：隐函数的概念，基本初等函数的性质及图形

主要内容

一、基本内容小结

1、函数的概念、表示法、函数的特性

2、复合函数、分段函数、反函数、隐函数

3、基本初等函数、初等函数

二、典型例题讲解

函数部分的重要题型：

●**函数概念（对应法则及定义域）；**（总习题一 1， 5）

●**函数性态；**（总习题一　2，3，7，）

●**复合函数。**（总习题一　4，8，9，10）

●**函数的建立。**（总习题一　12，13，14，15）

讨论、思考：函数与映射的区别?

作业：　掌握本次课所讲题目与方法、总习题一，完成“回顾与预习”.

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 80 分钟，授新课 0 分钟，安排讨论 9 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

授课时间	第 周 周 第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第二章 极限和连续**

第一节 数列的极限

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解数列极限的概念；掌握收敛数列的性质；会用定义证明数列的极限；

2. 培养学生能够运用极限思想分析实际问题；

3. 训练学生掌握“用极限概念”分析问题和解决问题的数学思想.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：数列极限的概念、数列极限的性质

难点：数列极限的概念的理解、收敛子列与数列的关系

主要内容

一、列极限的概念

1. 数列定义

按照某种顺序排列起来的无穷多个实数x_1，$x_2,\cdots$，$x_n,\cdots$,称为数列，记为数列$\{x_n\}$。

注：(1) 数列$\{x_n\}$是特殊的函数，即$x_n = f(n)$ $(n=1,2,\cdots$ ；

（2）有界数列$\{x_n\}$，即$\exists M>0,$ 使得$|x_n| \le M$ $(n=1,2,\cdots$ ；

（3）单调数列：单增数列与单减数列的统称。

单增数列$\{x_n\}$，即$x_n \le x_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots$ ；

单减数列$\{x_n\}$，即$x_n \ge x_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots$ 。

2. 数列极限的定义

定义 设有数列$\{x_n\}$，如果对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在一个正整数N，使得当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$或$x_n \to a(n\to\infty)$. 如果数列$\{x_n\}$没有极限，就说数列$\{x_n\}$是发散的。$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$.

注：(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$

(2) 极限是数列中数的变化总趋势，它与数列中某个项或前几个项的值无关。

二、数列极限的性质

定理 1　（极限唯一性）任何收敛数列$\{x_n\}$的极限是唯一的。

定理 2（收敛数列的有界性）如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界。

定理 3（收敛数列的保号性）（补充）如果数列$\{x_n\}$收敛a，且$a>0$（或$a<0$），那么存在正整数N，当$n>N$时，都有$x_n>0$（或$x_n<0$）。

证明　不妨就$a>0$的情形证明。由数列极限的定义，对$\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0,\ \exists$正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\dfrac{a}{2}$，　从而$x_n>a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}>0$

推论（补充）：如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\ge 0$（或$x_n\le 0$），且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么$a\ge 0$（或$a\le 0$）。

证明　设数列$\{x_n\}$从第N_1项起，即$n>N_1$时有$x_n\ge 0$。现在用反证法证明。若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$，则由定理 3 知，$\exists$正整数$N_2$，当$n>N_2$时有$x_n<0$。取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，按假设有$x_n\ge 0$，按定理 3 有$x_n<0$，这引起矛盾。所以必有$a\ge 0$。数列从某项起$x_n\le 0$的情形，可以类似地证明。

定理 4（收敛数列与子数列的关系）设数列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任一子数列$\{x_{n_k}\}$也收敛，且极限也是a。

讨论、思考：

1. 对于某一正数ε_0，如果存在正整数 N, 使得当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon_0$成立，是否有$x_n\to a\ (n\to\infty)$?

（答　不一定，例如，取$\varepsilon_0=\dfrac{3}{2}$，$a=1$，数列$\{x_n=2\}(n=1,2,\cdots$，显然$|x_n-a|<\varepsilon_0$ $(n=1,2,\cdots$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ne a$，事实上$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。）

2. 定理 2 表明收敛数列$\{x_n\}$一定有界。试问发散的数列是否一定无界？有界的数列是否一定收敛？无界数列是否一定发散？

（答　发散的数列是不一定无界，有界的数列不一定收敛。例如：数列$x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots$ 是有界的发散数列。但是无界数列一定发散。否则设数列$\{x_n\}$无界且收敛，将与定理 2 引起矛盾。）

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$，这一结论是否成立?

（答　成立。证明如下：

证“$\Rightarrow$”已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，根据定理 4（收敛数列与子数列的关系）知 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$。

“$\Leftarrow$”　$\because$　　$_1 = a$，$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$k_1$,当$k > k_1$时，有$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$；又

$\because$　　$= a$，$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$k_2$,当$k > k_2$时，有$|x_{2k} - a| < \varepsilon$；

记 $k = \max\{k_1, k_2\}$,取$N = 2k$,则当$n > N$时，

若 $n = 2k-1$，则 $k > K + \dfrac{1}{2} > k_1 \Rightarrow |x_n - a| = |x_{2k-1} - a| < \varepsilon$，

若 $n = 2k$，则 $k > K \ge k_2 \Rightarrow |x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon$，

从而只要 $n > N$，就有$|x_n - a| < \varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$　。）

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$，这一结论是否成立?

（答　这是一个常用的正确结论。证明如下：

$\because$　　$0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,存在正整数$N$,当$n > N$时，恒有

$$|x_n - 0| < \varepsilon \text{ 即 } ||x_n| - 0| < \varepsilon \text{ 成立}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

作业：（课本）习题 2-1（1,3,7）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

授课时间	第　周　星期　第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第二章　极限和连续**

第二节　函数的极限

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解函数极限的概念、左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；理解函数极限的性质。
2. 培养学生能够运用极限思想分析实际问题。
3. 训练学生掌握“用极限概念”分析问题和解决问题的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数极限的概念，左极限与右极限的概念。

难点：极限的局部保号性、函数极限与数列极限的关系。

主要内容

复习：数列极限的定义

新授：

第二节　函数的极

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

1. 定义 1

设函数$f(x)$当$|x|>a$时有定义，如果对于任意给定的正数ε（无论它有多么小），总存在一个正数X，使得对满足不等式$|x|>X$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数A称为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

注：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

2. 单侧极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

由定义可见，**极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.**

举例 1

二、自变量趋于有限值时函数的极限

1．定义 2

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数ε（无论它多

么小），总存在正数δ，使得对于满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$的所有x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数A称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

举例 2-3

2．单侧极限（左、右极限）

左极限：$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x_0-\delta<x<x_0$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x_0<x<x_0+\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由定义可见， $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$

举例 2-6

三、函数极限的性质

定理 1（函数极限的唯一性）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则极限是唯一的。

定理 2 （函数极限的局部有界性）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\le M$。

定理 3 （函数极限的局部保号性）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），则存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

推论 1　如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ne 0$，那么一定存在点$x_0$的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，必有$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

推论 2　如果在点x_0的某一去心邻域内有$f(x)\ge 0$（或$f(x)\le 0$），且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么必有$A\ge 0$（或$A\le 0$）.

定理 4（函数极限与数列极限的关系）如果极限存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内

任一收敛于x_0的数列，且$x_n \neq x_0$，则数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

讨论、思考：

1. 观察函数 $f(x)=\arctan x$，问 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 是否存在？

（答　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。　∵　　　$x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。）

2. 观察函数 $f(x)=\begin{cases} x+a & x\le 1 \\ \frac{x-1}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$，问 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在？

（解　$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$ ，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ 。

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$；

当 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在。）

作业：（课本）习题 2-2(1, 4, 6)

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

授课时间	第　　周　　星期　　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第二章　极限和连续**

第三节　无穷小与无穷大

第四节　极限的运算法则

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解无穷小量的概念，掌握无穷小量的性质。
2. 理解无穷大量的概念；掌握无穷小量与无穷大量的关系。
3. 理解函数极限与无穷小量的关系，熟练掌握极限运算法则。
4. 培养学生能够运用极限思想分析实际问题。
5. 训练学生掌握“用极限概念”分析问题和解决问题的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：无穷小量；极限运算法则 。

难点：极限四则运算法则的使用、复合函数极限的运算性质。

主要内容

复习: 函数极限的定义

新授:

第三节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$），则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量。

注：(1) 无穷小量是一个变量（函数），无论绝对值多么小的数都不是无穷小量，但"0"是唯一可作为无穷小量的数。

（2）无穷小量是相对自变量的某一变化过程而言的。

（3）无穷小量的精确定义

如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$（或 $X > 0$），使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$）时，$|f(x)| < \varepsilon$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为无穷小量，简称为无穷小，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$）。

（4）无穷小量与函数极限的关系

定理1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ **的充分必要条件是** $f(x) = A + \alpha(x)$**，其中** $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$。

2. 无穷小量的运算定理

定理2 （1）有限个无穷小量的和是无穷小；

（2）有界函数与无穷小量的乘积是无穷小。

推论：（1）常数与无穷小量的乘积是无穷小；

（2）有限个无穷小量的乘积是无穷小。

二、无穷大量

定义 2 如果对于任意给定的正数$M > 0$(不论它多么大)，总存在正数$\delta > 0$（或正数X），当$0 < |x - x_0| < \delta$（或$|x| > X$）时，有$|f(x)| > M$，那么称函数$f(x)$为当$\boldsymbol{x \to x_0}$(或$x \to \infty$)时的无穷大量,简称为无穷大。记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{（或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{）。}$$

注：(1) 无穷大是一个变量（函数），无论绝对值多么大的数都不是无穷大。

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，按照极限定义，函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限是不存在的，但为了方便叙述函数的绝对值无限变大这一性态，我们也说当$x \to x_0$时$f(x)$的极限为无穷大。对$x \to \infty$的情形可类似定义。

（3）在无穷大的定义中，将$|f(x)| > M$改为$f(x) > M$，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$，称函数$f(x)$当$x \to x_0$时为正无穷大；将$|f(x)| > M$改为$f(x) < -M$，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$，称函数$f(x)$当$x \to x_0$时为负无穷大。

（4）如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则$f(x)$在$x_0$的邻域内无界；但反之，如果$f(x)$在$x_0$的邻域内无界，则$f(x)$当$x \to x_0$时不一定是无穷大.（无穷大量一定是无界的量，反之无界的量不一定为无穷大量）

（5）无穷小和无穷大的关系

定理3 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

举例 1

第四节　极限的运算法则

1．函数极限的运算法则

定理 1　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$。

推论　设 $\lim f(x)$ 存在，C 为常数，则

$$\lim\left[Cf(x)\right]=C\lim f(x)；\quad \lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n。$$

2. 利用极限的运算法则求极限的方法举例

举例 1-8

结论：（1）若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\qquad+a_n$ 是多项式，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

（2）设 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理分式函数，其中 $P(x),Q(x)$ 是多项式，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0)$，如果 $Q(x_0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$。

3. 复合函数极限的运算性质

定理 2 设 $y=f[\varphi(x)\}$ 是由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，且在点 x_0 的某去心邻域内，$\varphi(x)\neq a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$。

举例 9

讨论、思考：

1.　举例说明两个无穷小量的商是否一定为无穷小量？

（答　不一定。例如，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty。）$$

2. 有理分式函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=$？

（答设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\qquad+a_n$，$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\qquad+b_m$，

其中 $a_0\neq0,b_0\neq0,m和n为非负整数$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & 当n=m,\\ 0, & 当n<m,\\ \infty, & 当n>m\end{cases}$）

3. 如下写法是否正确：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}=\dfrac{-1}{0}=\infty$.

（答 不正确。正确解法：

$\because \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-3)}=\dfrac{0}{-1}=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\infty$）

作业：（课本） 习题 2-3(3, 4) 习题 2-4(2, 3, 4)

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分 》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 90 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第二章　极限与连续**

第五节　极限存在准则及两个重要极限，连续复利

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解极限存在的两个准则（夹逼准则与单调有界准则），会用极限两个准则求极限。
2. 掌握两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，会利用重要极限公式求极限。
3. 了解连续复利的相关概念。
4. 训练学生能够用极限概念分析问题和解决问题的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 极限存在的两个准则、两个重要极限公式；利用两个重要极限公式求极限。

难点： 应用极限存在准则证明数列极限存在。

主要内容

复习：数列极限的定义

新授：

第五节　极限存在准则及两个重要极限、连续复利

一、极限存在准则

准则1（夹逼准则）如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$和$\{z_n\}$满足

（1）$y_n\le x_n\le z_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

准则1可以推广到函数的极限：

准则Ⅰ′ 如果函数$f(x),g(x),h(x)$满足

（1）当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$或（$|x|>M$）时，$g(x)\le f(x)\le h(x)$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在且等于$A$。

举例 1-3

准则2　单调有界数列必有极限.

注：准则 II 还可更明确的叙述为：单调增加上有界或单调减少下有界的数列必有极限

举例 2- 3

二、两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。　　② $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$。

注意：掌握它们的其它形式和变形.

（1）$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\sin\square}{\square}$ ，其中当$x\to\Delta$时，有$\square$　0。

（2）公式②的其它形式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$。

（3）$\lim\limits_{x\to\Delta}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$ ，其中当$x\to\Delta$时，有$\square$　　。

举例 4-9

三、连续复利

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r ,则

一年后本利和　$A_1=A_0(1+r)$

两年后本利和　$A_2=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2$　如果一年分 n期计息，年利率仍为 r，则 k 年后本利和　$A_k=A_0(1+r)^k$

每期利率为$\dfrac{r}{n}$，于是一年后的本利和$A_1=A_0(1+\dfrac{r}{n})^n$

k 年后本利和　$A_k=A_0(1+\dfrac{r}{n})^{nk}$

如果计息期数 n 趋于正无穷，即每时每刻计算复利（称为连续复利），则 k 年后的本利和为

$$A_k=\lim_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^{nk}=\lim_{n\to\infty}A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$=A_0e^{rk}$$

讨论、思考：

1. 已知 $x_1=1,x_{n+1}=1+2x_n(n=1,2,\cdots$ ，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$时，下列作法是否正确？

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由递推式两边取极限，得$a=1+2a\Rightarrow a=-1$。

（答　不对，此处$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。）

2. 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，试问极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 是 否一定存在？

（答　不一定存在。

例：取 $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，$f(x)=1$，$g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，显然 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$（存在）。

取 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$，则 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$（不存在）。）

作业：（课本） 习题 2-5

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

授课时间	第　周　星期　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第二章　极限与连续**

第六节　无穷小的比较

第七节　函数的连续性（第一讲）

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小求极限。
2. 理解函数在一点连续的概念、理解左、右连续的概念、理解函数在区间上连续的概念。
3. 培养学生能够运用极限思想分析实际问题.
4. 训练学生掌握“用极限概念”分析问题和解决问题的数学思想.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 无穷小量的比较 ，　函数连续的概念。

难点： 等价无穷小的代换定理在求极限时的正确应用。

主要内容

复习：

1. 无穷小量的定义

2. 引例　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x}=3$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x^2}=\infty$。

新授：

第六节　无穷小量的比较

一、两个无穷小量的比较的定义

定义　设$\alpha(x)$、$\beta(x)$为同一个自变量的变化过程中的无穷小，

（1）若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

（2）若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$低阶的无穷小;

（3）若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\neq0$，则称$\alpha(x)$和$\beta(x)$是同阶无穷小;

（4）若$\lim\dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k}=C\neq0$，$k>0$，则称$\beta(x)$是关于$\alpha(x)$的$k$阶无穷小;

（5） 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

举例1

二、等价无穷小的性质及应用

定理1　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件是 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理2　设 $\alpha \sim \alpha^*$、$\beta \sim \beta^*$、$\gamma \sim \gamma^*$，则 $\lim \dfrac{\beta\gamma}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta^*\gamma^*}{\alpha^*}$.

补充（常用的等价无穷小）：当 $x \to 0$ 时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2;\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x;\quad a^x - 1 \sim x \ln a。$$

举例 2-4

第七节　函数的连续性（一）

一、函数的连续性

1.　函数在一点连续的等价定义（设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义）

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$（定义 1）

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$（定义 2）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$ 时，有

$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$ 成立.（定义3）

2. 左连续与右连续

定义 4　函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续 $\Leftrightarrow f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

注：函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 点处既左连续又右连续.

举例 1

3. 函数在区间上连续的定义

在区间上每一点都连续的函数，叫做该区间上的连续函数；如果区间包含端点，那么函数在左端点连续是指右连续，在右端点连续是指左连续.

讨论、思考：

1. 什么样的极限有可能利用等价无穷小量的代换来求？

（答 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限才有可能利用等价无穷小量的代换来求。）

2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续应具备的三个条件是什么？

（答　函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续应具备的三个条件是：

① $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即函数值 $f(x_0)$ 存在；

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。）

作业：（课本）习题 2-6（1, 3）、习题 2-7（2）

参考资料（含参考书、文献等）： 《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 10 分钟，授新课 75 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　讨论　指导　其他
教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

授课时间	第　周　星期　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第二章　极限与连续**

第七节　函数的连续性(第二讲)

第八节 闭区间上连续函数的性质

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解函数间断点概念，掌握函数间断点的判断判别的方法，会判断函数间断点的类型
2. 掌握连续函数的性质和初等函数的连续性。
3. 理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），掌握这些性质的应用。
4. 培养学生能够运用极限思想分析实际问题.
5. 训练学生掌握“用极限概念”分析问题和解决问题的数学思想.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：连续函数的性质及运算；复合函数的连续性；初等函数的连续性。

难点：闭区间上连续函数的性质的应用。

主要内容

复习：函数在一点连续的定义。

新授：

第七节　函数的连续性（二）

二、函数的间断点

1、定义　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点。

2、间断点的分类

第一类间断点（左右极限都存在）

$f(x_0^-)=f(x_0^+)$，可去间断点；

$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，跳跃间断点。

第二类间断点（左极限与右极限至少有一个不存在）

无穷间断点: $x\to x_0$时, $f(x)\to\infty$；

振荡间断点: $x\to x_0$时, $f(x)$ 振荡。

举例 2-7

三、连续函数的运算

定理 1 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$ 以及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 连续。

定理2 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上连续且单调增加（减少），则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上连续且单调增加（减少）。

定理 3 设当 $x\to x_0$ 时，函数 $u=\varphi(x)$ 的极限存在且等于 u_0，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，同时函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在且等于 $f(u_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$。

定理 4 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 复合而成，若函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，而函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续。即 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\varphi(x_0)\right]$。

重要结论:

（1）基本初等函数在它们的定义域内都是连续函数。

（2）一切初等函数在其定义区间（包含在定义域内的区间）内都是连续的。

（3）对于初等函数 $f(x)$ 来说，若 x_0 是其定义区间内的点，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)。$$

举例 8-12

第八节 闭区间上连续函数的性质

一、闭区间上连续函数的性质

1. 最大值和最小值定理

定理1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得最大值和最小值。即存在 ξ_1，$\xi_2\in[a,b]$，使得

$$f(\xi_1)=\min_{a\le x\le b}f(x)，\quad f(\xi_2)=\max_{a\le x\le b}f(x)。$$

2. 有界性定理

定理 2 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。即存在常数 $M>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，都有 $|f(x)|\le M$。

3. 介值定理及其推论

定理3（介值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上连续，$f(a)=A，f(b)=B$，且 $A\neq B$，则对于 A 与 B 之间的任何一个数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$ 。

推论1（零点定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上连续，并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f(\xi)=0$ 。

推论 2　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上连续，它在 $[a，b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则对于 M 与 m 之间的任何一个数 C，至少存在一点 $\xi\in(a，b)$，使得 $f(\xi)=C$ 。

举例 1-2

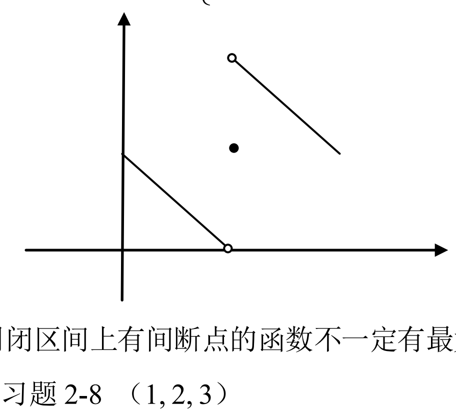
讨论、思考：

1. 指出正切函数 $y=\tan x$ 的所有间断点，并判断其类型。

（答　间断点为 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ；$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$ ，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 为第二类无穷间断点。）

2. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\le 2\end{cases}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上是否有最大值和最小值？

（答　如图所示，$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\le 2\end{cases}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上无最大值和最小值。



此例这表明闭区间上有间断点的函数不一定有最大值和最小值存在。）

作业：（课本）习题 2-8 （1, 2, 3）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

授课时间	第 周 周 第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)： **第二章 极限与连续**

习题课

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性定义。理解复合函数、分段函数、反函数及隐函数的概念。掌握基本初等函数的性质及图形。
2. 理解数列极限与函数极限、函数的左极限右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。掌握极限的性质及其四则运算法则。理解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限。掌握利用两个重要极限求极限的方法。理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。
3. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判断函数间断点的类型。了解连续函数

性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值与最小值定理、零点定理及介值定理），并会应用这些性质。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数极限的定义，各种求极限的方法，函数连续性与间断点的判定

难点：函数极限的定义

主要内容

一、基本内容小结

1、函数（函数的概念、表示法、函数的特性，复合函数、分段函数、反函数、隐函数、）基本初等函数、初等函数）

2、极限（数列的极限、函数的极限、无穷小量与无穷大量、极限的运算法则、极限存在准则、两个重要极限、无穷小的比较）

3、函数的连续性与间断点（函数连续性的概念、函数间断点的判定、连续函数性质和初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质）

4、求极限的方法

（1）有理（四则）运算法；（2）重要极限公式法；（3）无穷小量替换法；（4）利用无穷小量的性质及无穷小量与无穷大量的关系求极限法；（5）夹逼准则法；（6）单调有界准则法；（7）极限定义法；（8）变量替换法。

二、典型例题讲解

1、极限部分的重要题型：

●**极限概念、性质及存在准则；**（总习题二　1，　7，6）

●**求极限；**　（总习题二　 2）

●**已知极限确定参数；**　（总习题二　3）

●**无穷小阶的比较；**（总习题二　4，　5）

●**极限的有关证明题。**（总习题二　6）

2、函数连续性部分的重要题型：

●**连续性与间断点类型；**（总习题二 8，　9 ，10）

●**介值定理、最值定理与零点定理证明题。**（总习题二　11，　12）

讨论、思考：极限的基本思想是什么？如何用极限去分析问题和解决问题？

作业：　掌握本次课所讲题目与方法、总习题二，完成“回顾与预习”.

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 80 分钟，授新课 0 分钟，安排讨论 9 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　　模型　　　实物　　挂图　　　音像　　其他

第 1 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第三章　导数、微分、边际与弹性**

第一节　导数的概念

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．理解导数的概念及几何意义，理解单侧导数的概念，掌握导数与单侧导数的关系，会用定义求简单函数的导数，会用导数定义讨论分段函数在分段点的可导性。理解函数的可导性及连续性之间的关系。了解导数作为函数变化率的实际意义。会用导数表达一些简单的实际量；

2. 了解导数作为函数变化率的实际意义，培养学生应用导数分析经济学中的边际与弹性能；

3.　训练学生“应用导数表达一些简单的实际量”，掌握用导数解决实际问题的的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 导数的概念、可导性及连续性之间的关系，导数的几何意义。

难点：导数概念的理解和应用。

主要内容

第一节　导数的概念

一、导数的概念

1. 函数在一点的导数定义

定义1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（$\Delta x\neq 0$，且 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应的有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{h}\qquad（记 \Delta x=h）$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad（记 x=x_0+h）$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}。$$

注：（1）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示因变量 y 在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率；而导数

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$则是因变量在点$x_0$处的变化率。

（2）如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$为无穷大，这时$f'(x_0)$不存在，为了方便简记为$f'(x_0)=\infty$．。

（3）几何上$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线斜率，即$k=f'(x_0)=\tan\alpha$，其中α是切线的倾角。特别地，当$f'(x_0)=\infty$时，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处具有垂直于x轴的切线$x=x_0$。

2. 导函数的定义

定义2　若对于开区间I内的每一个x，函数$y=f(x)$都可导，则称函数$y=f(x)$在开区间I内可导．这时，对于任一$x\in I$，都对应着$f(x)$的一个确定的导数值．这样便得到了一个新的函数，此函数叫做原来函数$y=f(x)$的导函数（简称为导数），记作$f'(x)$，或y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

或

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}。$$

举例 3-3,3-4

（注：利用导数定义得到常函数、幂函数、指数函数、对数函数、正弦函数、余弦函数的导数公式。）

3、单侧导数（左导数和右导数）

定义3　左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}。.$$

函数$y=f(x)$在x_0点可导的充分必要条件是函数在x_0点的左导数和右导数均存在并

且相等。

举例 3-6

二、可导与连续的关系

定理 1　如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

举例 3-9，3-10，3-11

讨论、思考：

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别和联系？

（**答**　函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 区别是 $f'(x)$ 是函数，$f'(x_0)$ 数值；$f'(x_0)$ 与 $f'(x)$ 的联系：$f'(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$；注意：$f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$。）

2. 如何判定一个函数在某一点是否可导？

（**答**　要判定一个函数在某一点是否可导，可先检查函数在该点是否连续，如果不连续，就一定不可导；如果连续，再用下面的两种方法去判定：（1）直接用定义；（2）求左、右导数，看其是否存在而且相等。当然，也可以不先检查连续性而直接用两种方法去判定，但对于不连续函数，先检查连续性往往较为方便。）

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 3$，求 $f'(2)$ 。

（**解**　∵ $\quad) = f(2)$，又 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} \cdot (x-2) = 0$，∴ $f(2)=0$，

故 $f'(2)=\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 3$）

4. 若 $\forall x \in (-\delta, \delta)$ 时，恒有 $|f(x)| \le x^2$，请问 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处是否可导？

（**答**　$f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$。由题设 $f(0) = 0$，又∵ $\left| \dfrac{\quad) - f(0)}{x-0} \right| \le |x|$，由夹逼准则有 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$，故 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$。）

作业：（课本）习题 **3—1**（7，8，9，12，13）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：	√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：	√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：	√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 2 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第三章 导数与微分**

第二节　求导法则与基本初等函数求导公式（第一讲）

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．掌握导数的四则运算法则，掌握反函数的求导法则，掌握基本初等函数中三角函数及反三角函数的求导公式。

2. 了解导数作为函数变化率的实际意义，培养学生应用导数表达一些简单的实际量的能力。

3. 训练学生“应用导数表达一些简单的实际量”，掌握用导数解决实际问题的的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：导数的四则运算法则，反函数的求导法则， 基本初等函数的求导公式。

难点：反函数的求导法则的理解。

主要内容

复习：导数的定义

新授：

第二节　求导法则与基本初等函数求导公式（第一讲）

一、导数的四则运算法则

定理　设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 可导，则它们的和、差、积、商（商的分母不为零）也都在点 x 可导，且有

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$[\dfrac{u(x)}{v(x)}]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\ (v(x)\neq 0)$.

注：推论　$[Cu(x)]'=Cu'(x)$（C 为常数）；$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$；

推广　函数的和、差、积的求导法则可推广到有限个可导函数的情形.

例如，若函数[$u(x)$、$v(x)$、$w(x)$ 均可导，则

$$[u(x)\pm v(x)\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x).$$

$$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$$

举例 1-7

注：利用导数的四则运算法则得到了三角函数（正切函数、余切函数、正割函数、余割函数）的求导公式。

二、反函数的求导法则

定理2　若函数$x=\varphi(y)$在区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数$y=f(x)$在对应区间$I_x=\left\{x \mid x=\varphi(y), y\in I_y\right\}$内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

证： 由于$x=\varphi(y)$在I_y内单调、可导（从而连续），由第一章第九节定理 2 知道，$x=\varphi(y)$的反函数$y=f(x)$存在，且$f(x)$在I_x内也单调、连续。

任取$x\in I_x$，给x以增量$\Delta x(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$，由$y=f(x)$的单调性可知

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

因$y=f(x)$连续，故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，又$\varphi'(y)\neq 0$从而

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{。}$$

注：利用定理 2 证明反三角函数的求导公式（共 4 个）。

举例 1（补充）设$y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$，求$y'$。

解　$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)'=\frac{(\arcsin x)'\arccos x-\arcsin x(\arccos x)'}{(\arccos x)^2}$$

$$=\frac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}\text{。}$$

讨论、思考：

1. 设函数 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$ 时，下列作法是否正确？

$$因\ f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)，故\ f'(a)=\varphi(a)$$

（**答**　不正确，因为 $\varphi(x)$ 未必可导，乘积的求导法则不能直接使用。正确作法：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$ ）

2. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots$ ），求 $f'(0)$。

（解　方法一（导数定义）

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots\quad)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots\quad)=-99!$$。

方法二（乘积的求导法则）

$\because$ $\cdots$ $\cdots$

$$\therefore f'(0)=(0-1)(0-2)\cdots\quad)=-99!$$。）

3. 设 $y=3x-e^{-x}$，它的反函数的导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$____________。

（解　应填 $\frac{1}{3+e^{-x}}$。 $\because$ $-e^{-x}\neq 0,\ \therefore \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{3+e^{-x}}$ ）

作业：（课本）习题 3-2（2, 3, 4）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 3 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	2

授课题目(教学章、节或主题)：　**第三章 导数与微分**

第二节　求导法则与基本初等函数求导公式（（第二讲）

第三节　高阶导数

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．掌握复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的求导公式。

2. 了解高阶导数的概念和求导法则，掌握常见函数（$x^{\mu}, a^{x}, \dfrac{1}{ax+b}, \log_a x, \ln(1+x), \sin x,$ $\cos x$）的高阶导数公式，会求一些简单函数的高阶导数。

3. 了解导数作为函数变化率的实际意义，培养学生应用导数表达一些简单的实际量的能力。

4. 训练学生应用高阶导数表达一些简单的实际量，比如$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=a$等。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：复合函数的求导法则， 基本初等函数的求导公式。

难点：复合函数的求导法则，高阶导数的求法。

主要内容

复习：导数的定义

新授：

第二节　　求导法则与基本初等函数求导公式（（第二讲）

三、复合函数的求导法则

定理1　设函数$u=\varphi(x)$在点x处可导，且$y=f(u)$在对应点$u=\varphi(x)$处也可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

注：（1）复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形．例如，对三个可导函数$y=f(u)$、$u=\varphi(v)$、$v=\psi(x)$复合而成的函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

（2）正确使用复合函数的求导法则的关键：弄清复合函数的结构，由外向里逐层求导

（简称**层层剥皮求导法**）.

举例 1-9

四、基本求导公式（常用16个）和求导法则（已学习三类）

举例 3-16，3-17

第三节　高阶导数

一、高阶导数的定义

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)，\quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)，\quad \cdots，\quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)。$$

举例 1-5

二、高阶导数的求导法则

设 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，则在点 x 处有

① $\left[au(x)+bv(x)\right]^{(n)}=au^{(n)}(x)+bv^{(n)}(x)$（$a,b$ 为常数）；

② $\left[u(x)v(x)\right]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$（$u^{(0)}(x)=u(x)$，$v^{(0)}(x)=v(x)$）。

举例 6

三、一些简单函数的高阶导数公式

$$\left(x^m\right)^{(n)}=\begin{cases}0, & m=1,2,\cdots \quad ;\\ m(m-1)\cdots\qquad -1)x^{m-n}, & m\text{是其他实数。}\end{cases}$$

$$\left(a^x\right)^{(n)}=a^x(\ln a)^n，\qquad \left(\log_a x\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}，$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)，\qquad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)，$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}，\qquad [\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}。$$

讨论、思考：

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]'=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}$ 对吗？

（**解**　不对，因为复合函数求导漏层了，正确作法：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]'=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{9}{4}}。）$$

2. 设 $f(x)=\arcsin x$，$\varphi(x)=x^2$，求 $f[\varphi'(x)]$，$f'[\varphi(x)]$，$[f(\varphi(x))]'$。

（**解**　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\varphi'(x)=2x$，故；

$$f[\varphi'(x)]=\arcsin(2x)\ ;\ f'[\varphi(x)]=\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}。$$

3. 设 $y=f(\arctan x)$，又 $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

（**解**　$\dfrac{dy}{dx}=f'(\arctan x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'(\arctan 0)\cdot\dfrac{1}{1+0^2}=f'(0)=-1$）

4.　设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x-t}{x+t}\right)^x$，则 $f^{(n)}(t)=$______。

（**解**　由于 $\dfrac{x-t}{x+t}=1+\dfrac{-2t}{x+t}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-2t}{x+t}=-2t$，因此 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x-t}{x+t}\right)^x=te^{-2t}$，

从而 $f^{(n)}(t)=(te^{-2t})^{(n)}=t(-2)^n e^{-2t}+n(-2)^{n-1}e^{-2t}=(-2)^{n-1}e^{-2t}(n-2t)$。）

作业：（课本）习题 3-2（7）、习题 3-3(1，2)

参考资料（含参考书、文献等）： 《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　讨论　指导　其他
教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 4 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　　**第三章　导数、微分、边际与弹性**

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 掌握隐函数及由参数方程所确定的函数的导数求法，会求隐函数及由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数，掌握对数求导法。
2. 培养学生利用“相关变化率”思想解决实际应用中的变化率问题。
3. 训练学生掌握“用变化率的概念”分析问题和解决问题的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数极限的概念，左、右极限的概念。

难点：极限的局部保号性。

主要内容

复习：复合函数的求导法则、反函数的求导法则

新授：

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

1. 隐函数定义

一般地，如果变量 y 和 x 满足方程 $F(x，y)=0$，在一定条件下，当 x 在某区间内取任意一值时，总有满足方程的唯一的 y 与之对应，那么就说方程 $F(x，y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$。

注：　函数 $y=f(x)$ 通常叫做显函数。隐函数并非都能显化。

2. 隐函数的求导法则

设方程 $F(x，y)=0$ 确定了 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，则方程的两端同时对 x 求导，视 y 为中间变量 $y=y(x)$，于是可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

举例 4-1, 4-2, 4-3

二、对数求导法

所谓对数求导法，是先将函数 $y=f(x)$ 两边取自然对数，然后再求 y 对 x 导数的方法。

注：（1）当函数 y 由多个“因子”的积、商、乘方或根式组成时，常采用“对数求导法”对其求导；

（2）当函数为幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$，常采用“对数求导法”对其求导。

举例 4-4

三、参数方程确定函数的导数

设函数 $y=f(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所给出，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在区间 I_t 可导，且函数 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\overline{\varphi}(x)$ 存在，$\varphi'(t)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 也可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 二阶可导，那么函数 $y=f(x)$ 的二阶导数公式为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} .$$

四、相关变化率

设 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 和 y 之间存在某种关系，从而变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 之间也存在一定关系，称这两个相互依赖的变化率为相关变化率．相关变化率问题就是研究两个变化率之间的关系，以便从一个已知变化率求出另一个变化率．

举例 4-6

讨论、思考：

1. 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程为______。

（**解**　应填 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$。

由于曲线 $\rho=e^{\theta}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$，

因此所求的切线方程为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，即 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$。）

2. 已知函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，则 $y''(0)=$______。

（**解**　应填 $y''(0)=-2$。

由于 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 知，当 $x=0$ 时，$y=0$。等式 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导，得 $e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$，将 $x=0,y=0$ 代入，得 $y'(0)=0$。等式 $e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$ 两边对 x 求导，得 $e^y y'^2+e^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$，将 $x=0,y=0,y'(0)=0$ 代入，得 $y''(0)=-2$。）

作业：（课本）习题 4-4(1, 3, 4, 5)

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 5 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)： **第三章　导数、微分，边际与弹性**

第五节　函数的微分

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解微分的概念、掌握微分的运算法则以及常用初等函数的微分公式，理解微分的几何意义、掌握微分形式的不变性。掌握函数可微与可导的关系、函数可微与连续的关系。了解微分在近似计算中的应用。
2. 培养学生能够运用微分思想分析实际问题。
3. 训练学生掌握“用微分概念”分析问题和解决问题的数学方法。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：微分的概念、微分的运算法则以及常用初等函数的微分公式、微分的求法、微分的几何意义。

难点：微分形式的不变性的理解。

主要内容

复习： 函数导数的定义及导数的求法

新授:

第五节　函数的微分

一、微分的定义

定义　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其邻域内有定义，且

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

二、可微与可导的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微时，其微分一定是 $\mathrm{d}\,y=f'(x_0)\Delta x$.

注：（1）函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}\,y = f'(x)\Delta x \quad .$$

因自变量的微分等于自变量的增量．因此函数 $y = f(x)$ 的微分又可写成

$$\mathrm{d}\,y = f'(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

（2）函数的微分 $\mathrm{d}\,y = f'(x)\,\mathrm{d}\,x$ 是函数增量 $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ 的线性主部，它有两条性质：1）$\mathrm{d}\,y$ 是 Δx 的线性函数；2) Δy 与 $\mathrm{d}\,y$ 之差是 Δx 的高阶无穷小（当 $\Delta x \to 0$）。

举例 1-2

三、微分的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处关于 Δx 的微分 $\mathrm{d}y$ 表示曲线在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线当 x 有微小增量 Δx 时，切线上纵坐标的增量（改变量）．

四、微分的预算法则

由于函数 $f(x)$ 在任一点 x 的微分 $\mathrm{d}\,y = f'(x)\,\mathrm{d}\,x$，由基本初等函数求导公式和导数的运算法则，立即可得基本初等函数的微分公式和微分的运算法则。

（一）基本初等函数的微分公式

1. $\mathrm{d}\,C = 0$ ；　　C 为任意常数

2. $\mathrm{d}\,x^{\mu} = \mu x^{\mu-1}\,\mathrm{d}\,x$；

3. $\mathrm{d}\,a^{x} = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}\,x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$；　$\mathrm{d}\,e^{x} = e^{x}\,\mathrm{d}\,x$；

4. $\mathrm{d}\log_a|x| = \dfrac{1}{x\ln a}\,\mathrm{d}\,x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$；　$\mathrm{d}\ln|x| = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$；

5. $\mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}\,x$；　$\mathrm{d}\cos x = -\sin x\,\mathrm{d}\,x$；

   $\mathrm{d}\tan x = \sec^2 x\,\mathrm{d}\,x$；　$\mathrm{d}\cot x = -\csc^2 x\,\mathrm{d}\,x$；

   $\mathrm{d}\sec x = \sec x \cdot \tan x\,\mathrm{d}\,x$；　$\mathrm{d}\csc x = -\csc x\cot x\,\mathrm{d}\,x$；

6. $\mathrm{d}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$；　$\mathrm{d}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$；

   $\mathrm{d}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$；　$\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\,x = -\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$；

7. $\mathrm{d}(\mathrm{sh}\,x) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}\,x$；$\mathrm{d}(\mathrm{ch}\,x) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}\,x$；$\mathrm{d}(\mathrm{th}\,x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}\,x$；

   $\mathrm{d}(\mathrm{arsh}\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}\,x$；$\mathrm{d}(\mathrm{arch}\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x$；$\mathrm{d}(\mathrm{arth}\,x) = \dfrac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$；

（二）微分的四则运算法则

（1）$\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}\,f(x)$　　　（C 为常数）；

（2）　$\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}\,u(x) \pm \mathrm{d}\,v(x)$；

（3）　$\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\cdot \mathrm{d}\,u(x) + u(x)\cdot \mathrm{d}\,v(x)$；

（4）　$\mathrm{d}[\dfrac{u(x)}{v(x)}] = \dfrac{v(x)\cdot \mathrm{d}\,u(x) - u(x)\cdot \mathrm{d}\,v(x)}{v^2(x)}$　　$(v(x) \neq 0)$.

（三）复合函数的微分法则

设 $f(u)$ 可导，则有一阶微分形式的不变性

$$\mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u \text{ 。}$$

举例 5-4

五、微分在近似计算中的应用

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0) \neq 0$，故当 $|\Delta x|$ 很小时，则有 $\Delta y \approx dy$，

即
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

或
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \text{ .}$$

若令 $x = x_0 + \Delta x$ ，则 $\Delta x = x - x_0$，当 $|x - x_0|$ 很小时，近似公式变为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

特别地，取 $x_0 = 0$，当 $|x|$ 很小时，近似公式变为 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$.

举例 8-9

讨论、思考：

1. 微分与导数有何区别?

（答　微分与导数的区别可以下面几个方面考虑：

（1）微分与导数是两个不同的概念。微分是函数在一点处由于自变量增量所引起的函数变化量的主要部分(近似值)；而导数则是函数在一点处的变化率；

（2）微分与导数的几何意义不同，导数 $f'(x_0)$ 几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率；函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处关于 Δx 的微分 $\mathrm{d}y$ 表示曲线在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线当 x 有微小增量 Δx 时，切线上纵坐标的增量（改变量）。

（3）对于一个给定的函数，它的微分跟 x 与 Δx 都有关系，且 Δx 也不一定很小，而导

数只与 x 有关；

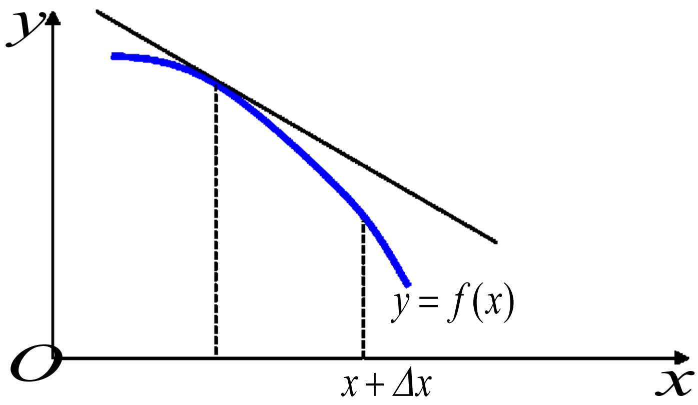
（4）因为微分具有形式不变性，所以提到微分可以不说明是关于哪个变量的微分，但提到导数必须说清是对哪个变量的导数。）

2. 函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 是否一定为正？ 当 $\mathrm{d}x>0$ 时， $\mathrm{d}y$ 是否一定为正？

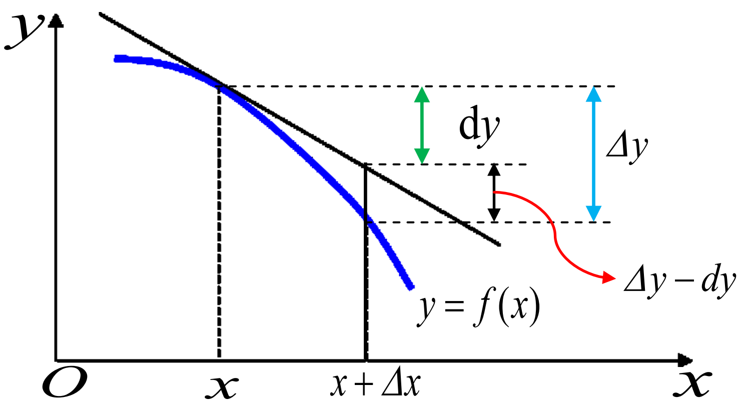
（答　函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 不一定为正，即使 $\mathrm{d}x>0$， $\mathrm{d}y$ 也一定为正。

例如，函数 $y=f(x)=-x^3$，取 $x_0=1,\ \Delta x=\mathrm{d}x=0.1>0$，但 $\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=x_0=1\\ \Delta x=0.1}}=-0.3<0$。）

3 .指出下图中在点 x 处表示 Δy， $\mathrm{d}y$， $\Delta y-\mathrm{d}y$ 的线段，并说明其正负。



（**解**　在点 x 处表示 Δy， $\mathrm{d}y$， $\Delta y-\mathrm{d}y$ 的线段如图所示，且 $\Delta y<0$， $\mathrm{d}y<0$， $\Delta y-\mathrm{d}y<0$。



作业：（课本） 习题 3-5（3，6，7）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 6 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**
授课题目(教学章、节或主题)：**第三章 导数、微分、边际与弹性** **第六节 边际与弹性**			
教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）： 1. 理解边际函数与弹性函数的概念； 2. 掌握常见的边际函数（边际成本，边际收益和边际利润）和常见的弹性函数（需求价格弹性和供给弹性）； 2. 训练学生会用边际与弹性分析和解决见到的经济学问题。.			

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：边际与弹性的定义，常见的边际与弹性函数；

难点：弹性的定义

主要内容

第六节 边际与弹性

一、边际的概念

定义 1　如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

经济学中称它为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的边际函数值.

设在点 $x=x_0$ 处，x 从 x_0 改变一个单位时 y 的增量 Δy 的准确值为 $\Delta y\big|_{\Delta x=1}^{x=x_0}$，当 x 改变量很小时，则由微分的应用知道，Δy 的近似值为

$$\Delta y\big|_{\Delta x=1}^{x=x_0}\approx \mathrm{d}y=f'(x)\Delta x\big|_{\Delta x=1}^{x=x_0}=f'(x_0)$$

注意 当 $\Delta x=-1$ 时，标志着 x 从 x_0 减小一个单位.

这表明 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处，当 x 产生一个单位的改变时，y 近似改变 $f'(x_0)$ 个单位．在应用问题中解释边际函数值的具体意义时往往略去“近似”二字.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数．$f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值．即当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

例 1 设函数 $y=2x^2$，试求 y 在 $x=5$ 时的边际函数值.

解 因为 $y'=4x$，所以 $y'|_{x=5}=20$.

该值表明：当$x=5$时，x 改变 1 个单位（增加或减少 1 个单位），y 改变 20 个单位（增加或减少 20 个单位）.

二、 经济学中常见的边际函数

1. 边际成本

边际成本 总成本$C(Q)$的导数$C'(Q)$成称为边际成本.即

$$C'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$$

边际平均成本　平均成本$\overline{C}(Q)$的导数$\overline{C'}(Q)$称为边际平均成本，即

$$\overline{C'}(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\overline{C'}(Q+\Delta Q)-\overline{C'}(Q)}{\Delta Q};$$

总成本$C(Q)$等于固定成本C_0与可变成本$C_1(Q)$之和，即$C(Q)=C_0+C_1(Q)$

而边际成本则为：

$$C'(Q)=[C_0+C_1(Q)]'=C_1'(Q)$$

这样可以看出，边际成本与固定成本无关

例 2 设某产品生产Q单位的总成本为$C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$，求：

(1) 生产 900 个单位的总成本和平均成本；

(2) 生产 900 个单位到 1000 个单位时的总成本的平均变化率；

(3) 生产 900 个单位的边际成本，并解释其经济意义.

解 (1)生产 900 个单位时的总成本为

$$C(Q)\big|_{Q=900}=1100+\frac{900^2}{1200}=1775$$

平均成本为

$$\overline{C}(Q)\big|_{Q=900}=\frac{1775}{900}=1.99$$

（2） 生产 900 个单位到 1000 个单位时总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}=\frac{C(1000)-C(900)}{1000-900}=\frac{1993-1775}{100}=1.58$$

边际成本函数

$$C'(Q)=\frac{2Q}{1200}=\frac{Q}{600}$$

当 $Q=900$ 时，$C'(900)=1.5$

2、**边际收益**　总成本 $R(Q)$ 的导数 $R'(Q)$ 成称为边际收益.即

$$R'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{R(Q+\Delta Q)-R(Q)}{\Delta Q}$$

称 P 为价格，$P=P(Q)$，因此，

$$R(Q)=PQ=QP(Q),\ R'(Q)=QP'(Q)+P(Q)$$

例 3　设某产品的需求函数为 $P=20-\dfrac{Q}{5}$，其中 P 为价格，Q 为销售量，求销售量为 15 个单位时的总收益，平均收益与边际收益．并求销售量从 15 个单位增加到 20 个单位时收益的平均变化率．（解见课本）

边际利润　总利润 $L(Q)$ 的导数 $L'(Q)$ 成称为边际利润.即

$$L'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{L(Q+\Delta Q)-L(Q)}{\Delta Q}$$

边际利润表示：若已经生产了 Q 单位产品，再生产一个单位产品所增加的总利润.

总利润：$L(Q)=R(Q)-C(Q)$

总利润边际：$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$

当 $R'(Q)>C'(Q)$ 时，$L'(Q)>0$，

经济意义：如产量已达到 Q，再多生产一个单位产品，所增加的收益大于所增加的成本，因而总利润有所增加;

当 $R'(Q)<C'(Q)$ 时，$L'(Q)<0$

经济意义：再增加产量，所增加的收益要小于所增加的生产成本，从而总利润将减少.

例 4 某工厂对其产品的销售情况进行大量统计后分析后，得出总利润 $L(Q)$ (元)与每月产量 Q(吨)的关系为 $L=L(Q)=250Q-5Q^2$，试确定每月生产 20 吨，25 吨，35 吨的边际利润，并做出经济解释.

解 利润边际为 $L'(Q)=250-10Q$，则

$$L'(Q)\big|_{Q=20}=L'(20)=50$$

$$L'(Q)\big|_{Q=25}=L'(25)=0$$

$$L'(Q)\big|_{Q=35}=L'(35)=-100$$

上述结果表明当生产量为每月 20 吨时，再增加一吨，利润将增加 50 元，当产量为每月 25 吨时，再增加一吨，利润不变；当产量为 35 吨时，再增加一吨，利润将减少 100. 此处说明，对厂家来说，并非生产的产品越多，利润越高.

三、弹性的概念

1.定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $x_0\neq 0$，称函数的相对改变量 $\dfrac{\Delta y}{y_0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ 与自变量的相对改变量 $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 为函数从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 两点间的平均相对变化率，或称为 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 两点间的弹性或弧弹性.

当 $\Delta x\to 0$ 时，称 $\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 的极限为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的相对变化率，也就是相对导数，或称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的点弹性.

记作 $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$

即
$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{y_0}{x_0}$$
$$=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}$$

当 x_0 为定值时，$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 为定值，且当 Δx 很小时

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}\approx\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$$ （=孤弹性）

弹性函数的定义：对一般的 x，若 $y=f(x)$ 可导且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=y'\frac{x}{y}$$

是 x 的函数，称为 $f(x)$ 的弹性函数（简称弹性），记为 $\dfrac{E}{Ex}f(x)$ 或 E_x.

函数的弹性（点弹性或弧弹性）与量纲无关，函数 $f(x)$ 在点 x 处的弹性 $\dfrac{E}{Ex}f(x)$ 反映了 x 的变化幅度 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 对 $f(x)$ 变化幅度 $\dfrac{\Delta y}{y}$ 的大小影响，也就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度.

由弹性的定义可知：

$$\frac{Ey}{Ex}=y'\cdot\frac{x}{y}=\frac{y'}{\frac{y}{x}}=\left(\frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}}\right).$$

这样，弹性在经济学上又可理解为边际函数与平均函数之比.

例 6 求函数 $y=x^{\alpha}$ (α为常数）的弹性函数.

解 直接计算得到所求的弹性函数为

$$\frac{Ex}{Ey}=\frac{y}{x}\bullet \quad \bullet \quad \bullet\ \bullet$$

由此例知，幂函数的弹性函数为常数，因此称为不变弹性函数.

四、经济学中常见的弹性函数

1. 需求的价格弹性

基本概念 当弹性定义中的 y 被定义为需求量时就是需求弹性. 所谓需求的价格弹性是指当价格变化一定的百分比以后引起的需求量的反应程度. 设需求函数 $Q_d=Q(P)$ 可导，则需求的价格弹性可用公式表示为

$$E_d=\frac{EQ}{EP}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}$$

而 $\dfrac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$ 称为该商品在 P 与 $P+\Delta P$ 两点间的需求价格弹性或弧弹性.

一般来说，需求函数是价格的单调减函数，故需求函数的弧弹性为负值，从而当 $\Delta x\to 0$ 时，其极限值 E_d 总是小于或等于零，并且实际中一般取负值. 有时为讨论方便，将其取绝对值，也称之为需求的价格弹性，并记为 η，即

$$\boxed{\eta=\eta(P)=\left|E_d\right|=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}}$$

若 $\eta=|E_d|=1$，此时商品需求量变动的百分比与价格变动的百分比相等，称为单位弹性或单一弹性.

若 $\eta=|E_d|<1$（即,此时商品需求量变动的百分比低于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响不大，称为缺乏弹性或低弹性.

若 $\eta=|E_d|>1$，此时商品需求量的变动的百分比高于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响较大，称之为富于弹性或高弹性.

例 7 设某产品的需求函数为 $Q=100-2P, 0\le P\le 50$，其中 P 为价格，Q 为需求量，求

（1）当 $P=10$，且价格上涨 1%时，需求量 Q 是增加还是减少，变化百分之几?

（2）讨论商品价格变化时，需求量变化的情况．（课本 142）

需求弹性和总收益的关系

在市场经济中，商品经营者关心的是提价 $\Delta P>0$ 或降价 $\Delta P<0$ 对总收益的影响. 利用需求弹性的概念，可以分析价格变动是如何影响销售收益的.

总收益 R 是商品价格 P 与销售量 Q 的乘积，即

$$R=P\cdot Q=Pf(P)$$

边际总收益

$$R'=Pf'(P)+f(P)=f(P)[1+f'(P)\cdot\frac{P}{f(P)}]$$

$$=f(P)[1-|E_d|]=f(P)(1-\eta)$$

（I）若 $\eta<1$，表示需求变动的幅度小于价格变动的幅度．此时 $R'>0$,即边际收益大于 0，价格上涨，总收益增加；价格下跌，总收益减少．商品的价格和厂商的销售收入呈同方向变动.

（II）若 $\eta>1$，表示需求变动的幅度大小于价格变动的幅度．此时 $R'<0$,即价格上涨，总收益减少；价格下跌，总收益增加．商品的价格和厂商的销售收入呈反方向变动。

（III）若 $\eta=1$，表示需求变动的幅度等于价格变动的幅度．降低价格或提高价格对厂商销售收益都没有影响.

综上所述，总收益的变化受需求弹性的制约，随商品需求弹性的变化而变化.

2. 供给弹性 通常指的是供给的价格弹性．设供给函数 $Q_s=f(P)$ 可导，则供给弹性

$$\boldsymbol{E_s=\frac{dQ}{dP}\times\frac{P}{Q}}$$

式中 E_s 为供给的价格弹性.

3. 收益弹性

$$\frac{ER}{EP}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\times\frac{P}{R}，\ \frac{ER}{EP}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\times\frac{Q}{R}$$

式中：$\frac{ER}{EP}$——收益的价格弹性；$\frac{ER}{EQ}$——收益的销售弹性

讨论、思考：

1. 假设某产品的需求函数 $P=100\sqrt{X}$，其中 X 为产量(假定等于需求量)，P 为价格，求收益的价格弹性.

2. 某商品的需求量 Q 关于价格 P 的函数为$Q = 75 - P^2$

(1)求 P=4 时的需求的价格弹性，并说明其经济意义。

(2)P=4 时，若价格提高 1%，总收益是增加还是减少，变化百分之几?

3. 设某产品的需求函数为$Q = Q(P)$，收益函数为$R = PQ$，为单调减少函数.如果当价格 P_0 时产量为 Q_0，边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0} = a > 0$，收益对价格的边际效应为 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0} = c < 0$，需求对价格的弹性$\eta = b > 1$，求$P_0$与$Q_0$.

作业：　习题 3-6（1, 2, 8）

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 80 分钟，授新课 0 分钟，安排讨论 9 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 7 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　　**第三章 导数与微分，边际与弹性**

习题课

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解导数与微分的概念，导数与微分的关系，以及导数的几何意义，会求平面曲线上某点处的切线和法线方程。了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量。理解函数的可导性与连续性之间的关系。
2. 熟练掌握导数的四则运算法则、复合函数的求导法则以及基本初等函数的导数公式，会计算分段函数的导数。了解为分的四则运算法则和一阶微分形式的不变形，会计算函数的微分。会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数，会计算反函数的导数。
3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。
4. 训练学生掌握 “用导数与微分概念”分析问题和解决问题的数学思想方法。.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：导数与微分的定义，初等函数导数的求法；
难点：复合函数求导法，高阶导数的求法

主要内容

一、基本内容小结

1、导数与微分的概念及其关系

2、导数与微分的求法

（1）正确使用导数及微分公式和法则 ；

（2）熟练掌握求导方法和技巧；

1) 求分段函数的导数 - - - - - 注意讨论界点处左右导数是否存在和相等；

2) 隐函数求导法 ⟶ 对数求导法；

3) 参数方程求导法 ⟵ 极坐标方程求导；

4）复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)；

5）高阶导数的求法 $\begin{cases}\text{逐次求导归纳}\\ \text{间接求导法（化代数和）}\\ \text{利用莱布尼兹公式.}\end{cases}$

3、导数与微分的应用

（1）利用导数定义解决的问题

1) 推出基本初等函数的导数公式及求导法则；

2) 求分段函数在分界点处的导数 ,及某些特殊函数在特殊点处的导数；

3) 由导数定义证明一些命题；

4）用导数定义求极限；

5）求曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线斜率，即$k=f'(x_0)$。

（2）利用微分进行近似计算与误差估计

二、典型例题讲解

本章典型考题类型：

●**可导性问题；**（总习题三　1，2）

●**利用导数定义讨论分段函数在分段点的导数；**（总习题三　5，7，8）

●**运用求导公式与四则运算法则求显函数的导数（包括二阶导数）；**（总习题三　9,12）

●**求复合函数的导数；**（总习题三　9）

●**求隐函数的导数；**（总习题三　10，11）

●**求参数方程的导数；**（总习题三　13）

例如，设$f''(t)\neq 0$，又$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______。

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{f''(t)}$

●**利用对数求导法求导数；**（总习题三　9）

●**求高阶导数；**（总习题三　15）

例如，自然数n至少为（　）时，函数$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0\,, \qquad x=0\end{cases}$在$x=0$处二阶可导。

（A）1　　　　（B）2　　　　（C）3　　　　（D）4

解　应选（D）。

当$x\neq 0$时，$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$（$n>1$），在$f'(0)=0$的条件下，

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-3}\left[nx\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right]=0$（$n>3$）

所以自然数n至少为4时，函数$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0\,, \qquad x=0\end{cases}$在$x=0$处二阶可导，故选（D）。

●**利用导数定义求极限；**（总习题三　1）

●**利用导数几何意义求切线及法线方程；**（总习题三　14）

●**求显函数与隐函数的微分。**

●**边际与弹性；**（总习题三　17，18，19）

讨论、思考：

1．设 $f(x+1)=af(x), f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　）。

（A）不可导　　（B）可导且 $f'(1)=a$

（C）可导且 $f'(1)=b$　　（D）可导且 $f'(1)=ab$

（**解**　应选（D）。

解法一　令 $t=x+1$，则 $f(t)=af(t-1)$，由复合函数可导性及求导法则知，$f(t)$ 在 $t=1$ 处可导且 $f'(t)\big|_{t=1}=af'(t-1)(t-1)'\big|_{t=1}=af'(0)=ab$，故选（D）。

解法二　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=ab$，故选（D）。）

作业：　掌握本次课所讲题目与方法，总习题三、完成“回顾与预习”.

参考资料（含参考书、文献等）：

《微积分》(第三版)，吴传生编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 80 分钟，授新课 0 分钟，安排讨论 9 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 1 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　　第　　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第四章　微分中值定理与导数的应用**

第一节　中值定理

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 掌握罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)定理的条件及结论；了解柯西 (Cauchy)定理的条件及结论。
2. 了解构造辅助函数并利用中值定理证明等式及不等式。
3. 训练学生“应用构造辅助函数法”证明一些相关的命题，掌握中值定理证明问题的的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点： 罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)定理。

难点：柯西 (Cauchy)定理及构造辅助函数。

主要内容

第一节　微分中值定理

一、费马引理

定理 1 （费马引理）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在 x_0 处可导，且对任意 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$），则有 $f'(x_0) = 0$ 。

二、罗尔中值定理

定理 2（罗尔定理） 如果函数 $f(x)$ 满足

⑴ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

⑵ 在开区间 (a,b) 内可导；

⑶ $f(a) = f(b)$,

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a < \xi < b)$，使得

$$f'(\xi) = 0 \text{ 。}$$

举例 4-1，4-2，4-3

三、拉格朗日中值定理

定理 3（拉格朗日中值定理）如果函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \quad \text{或} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\text{。}$$

由拉格朗日中值定理可以得出在积分学中两个有用的推论。

推论 1　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数恒为零，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是一个常数。

推论 2　如果在区间 (a,b) 内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)=g(x)+C$。.

四、柯西中值定理

定理 4（柯西中值定理）如果函数 $f(x)$、$F(x)$ 满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上都连续；

（2）在开区间 (a,b) 内都可导，且 $F'(x)\neq 0$.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\text{。}$$

讨论、思考：

1. 举出罗尔定理和拉格朗日定理成立和不成立的例子各一个，并说明不成立的原因。（解例如　函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 满足罗尔定理条件，但函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\le\pi\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，从而 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\le\pi\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在区间 $[0,\pi]$ 上不满足罗尔定理条件；又如函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 满足拉格朗日定理条件，但函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导，从而 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-1,1]$ 上不满足拉格朗日定理条件。实例告诉我们：三个中值定理（罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理）中的条件是使结论成立的充分条件。当中值定理的条件不满足时，定理的结论可可能成立。）

2. 罗尔定理，拉格朗日定理，柯西定理有何联系？

（**答**　在柯西中值定理中，取 $F(x) \equiv x$ 时，柯西中值公式就成为拉格朗日中值公式；在拉格朗日中值公式中，取 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日中值公式就变为罗尔定理的结论。所以说：拉格朗日定理是柯西定理的特殊情形，而罗尔定理是拉格朗日定理的特殊情形，当然也可以反过来说：拉格朗日定理是罗尔定理的推广，柯西定理是拉格朗日定理的推广。）

作业：（课本）习题 4**—1**（1, 2, 3, 4）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：　√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：　√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：　√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 2 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第四章　微分中值定理与导数的应用**

第五节　微分中值定理（第二讲）（第五节调整）

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．掌握函数的一阶、二阶、三阶泰勒中值定理。

2.　掌握简单函数的 n 阶麦克劳林公式。

2. 了解函数的高阶（三阶）泰勒中值定理。

3. 了解用泰勒中值定理的简单应用，如求极限、近似计算、证明相关的数学命题。

4.　训练学生掌握“用泰勒中值定理”解决实际问题的的数学思想。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：（包括带拉格朗日余项和带有佩亚诺余项）。

难点： 泰勒中值定理的应用。

主要内容

复习：微分在近似计算中应用公式

新授：

第五节　泰勒微分中值定理

一、泰勒（Taylor）中值定理

定理 1（泰勒（Taylor）中值定理 1）　如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 处具有直到 n 阶的导数，则对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

其中 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ 称为佩亚诺余项. 公式（1）称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处（或按 $(x-x_0)$ 的幂展开）的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

推论 1　在泰勒公式（1）中，取 $x_0=0$，则有带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)。$$

定理 2（泰勒（Taylor）中值定理 2）　如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $(n+1)$ 阶导数，则对于任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (2)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$在$x_0$与$x$之间）称为拉格朗日型余项．公式（2）称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处(或按 $(x-x_0)$ 的幂展开)的拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式．

推论 2　在泰勒公式（2）中，取 $x_0=0$，那么ξ在0与x之间 。因此可以令 $\xi=\theta x\ (0<\theta<1)$，从而有带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (0<\theta<1)\text{。}$$

举例7-8

二、常用初等函数的麦克劳林公式（$(0<\theta<1)$）

1．$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\ \frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$，$x\in(-1,1)$．

2．$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\ \frac{x^n}{n!}\ \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}$，　$x\in(-\infty,\ +\infty)$．

3．$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\ {}^{-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$．

4．$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\ \frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$．

5．$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\ {}^{-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$，$x\in(-1,+\infty)$．

6．$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$，

其中 $R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{n+1}$，$|x|<1$。

注：以上公式中的余项也可以写成佩亚诺型。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\text{。}$$

证　由泰勒公式，得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$$

其中 ξ_1 介于 x 与 a 之间，ξ_2 介于 x 与 b 之间，在上两式中令 $x=\frac{a+b}{2}$，得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2,$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2$$

两式相减，从而

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))$$

$$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|)\le\frac{(b-a)^2}{4}\max(\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|)=\frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(\xi)\right|$$

从而 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\left|f''(\xi)\right|\ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}。$$

讨论、思考：

1.　微分中值定理的解题思想有哪些？

（**答**　微分中值定理的解题方法、解题思想包含：

（1）证明含一个中值的等式或根的存在问题，多用罗尔定理, 可用原函数法找辅助函数。

（2）若结论中涉及到同一函数在两点值的差，可考虑用拉格朗日中值定理。

（3）若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理　。

（4）若结论中含两个或两个以上的中值，　必须多次应用中值定理　。

（5)若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导函数用中值定理　。

（6）若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧。）

2.　如何用泰勒中值定理证明 e 为无理数？

（**证明**：由泰勒中值公式，得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\quad\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\qquad(0<\theta<1)$$

两边同乘 $n!$

$$n!e = 整数 + \frac{e^{\theta}}{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

假设 e 为有理数 $\frac{p}{q}$（p,q 为正整数），

则当 $n \geq q$ 时，等式左边为整数，

当 $n \geq 2$ 时，等式右边不可能为整数。

矛盾！故 e 为无理数。）

作业：（课本）习题 4-5（1,3,5）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　讨论　指导　其他

教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 3 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第四章　微分中值定理与导数的应用**

第二节　洛必达法则（L'Hospital）

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 熟练掌握利用洛必达法则求“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的方法。

2. 掌握利用洛必达法则求“$0\cdot\infty$”型，“$\infty-\infty$”型，“1^{∞}”型，“0^{0}”型，“∞^{0}”型未定式极限的方法。

3. 掌握应用洛必达法则求未定式极限应当注意的问题。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：洛必达法则求极限。

难点：“1^{∞}”型，“0^{0}”型，“∞^{0}”型未定式极限的求法。

主要内容

复习：柯西中值定理

新授：

第二节　洛必达法则（L'Hospital）

一、当 $x\to a$ 时的“$\frac{0}{0}$”型未定式的洛必达法则

定理 1　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$；

(2) **在点 a 的某去心邻域内 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$；**

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **存在（或为无穷大）.**

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{（或为无穷大）.}$$

举例 4-1，4-2，4-3

二、当 $x\to\infty$ 时的“$\frac{0}{0}$”型未定式的洛必达法则

定理 2　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

⑴ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$；

⑵ 当 $|x|>N$ 时 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$；

⑶ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）．

则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注：对于 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，也有相应的定理，这里省略。

举例 4-4，4-5, 4-6

三、其它类型的未定式

（1）求“$0\cdot\infty$”型、“$\infty-\infty$”型未定式的极限时，通常都是用简单的恒等变形转化成“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，再使用洛必达法则。

举例7-8

（2）求 “1^{∞}”，“0^{0}”，“∞^{0}”型未定式的极限时，通常利用对数恒等式转化为指数函数求极限。

设极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为“1^{∞}” 型或“0^{0}” 型或“∞^{0}”型，这里假设 $f(x)>0$，因为
$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$
所以，这三种类型的极限都归结为“$0\cdot\infty$”型或“$\infty\cdot 0$”型未定式，由（1）的方法求解。

举例 4-7——4-11

四、使用洛必达法则求未定式极限，应当注意的几点

（1）只有当“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式符合洛必达法则的三个条件时，才能使用洛必达法则；

（2） 对于“$0\cdot\infty$”型和“$\infty-\infty$”’型等未定式，必须先转化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型才能使用洛必达法则；对于“0^{0}”、“∞^{0}”和“1^{∞}”型未定式，通常先取对数，然后转化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型；

（3） 使用洛必达法则求极限时应先化简（通过代数、三角恒等变形、约去公因子等），并与其它方法结合使用，例如等价无穷小代换，重要极限公式，变量代换等；

（4）洛必达法则条件只是充分的，而不是必要的．因此，当$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在且不为∞时，不能肯定$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在，此时要使用其它的方法求极限.

讨论、思考：

1. 对于数列的极限，当$n\to\infty$时，求两个数列$f(n)$，$g(n)$之比的极限，是否可以使用洛必达法则求极限?

（**答**　数列是自变量取正整数的整标函数，当$n\to\infty$时，求两个数列$f(n)$，$g(n)$之比的极限，有时可以用洛必达法则。当应注意，这是我们不能把数列对n求导，这是没有意义，我们首先应将离散变量n换成连续变量x，其次检验$x\to+\infty$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是不是“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，然后再应用洛　必达法则。例如，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}},$$

由于
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$。这是因为当$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$时，$n\to\infty$作为$x\to+\infty$的一种方式，自然$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$也成立。）

3. 下列计算是否正确？为什么？

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{2-\sin x}$不存在（∵　　　　x与$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$不存在）。

（**答**　不正确，因为导数之比的极限不存在，不能得出函数之比的极限也不存在的结论。事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\cos x}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{2+\dfrac{1}{x}\cdot\cos x}=\frac{1-1}{2+0}=0。）$$

作业：（课本）习题 4-2（1,2）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 4 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　　**第三章　微分中值定理与导数的应用**

第三节　导数的应用

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 熟练掌握用导数判断函数的单调性的方法。
2. 掌握用导数判断函数图形凹凸性的方法。
3. 训练学生用变化率分析问题和解决问题的数学思想.

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数的单调性、曲线的凹凸性。

难点：函数的单调性、曲线的凹凸性的应用。

主要内容

复习：函数单调性定义、拉格朗日中值定理、泰勒中值定理（一阶）

新授：

第三节　导数的应用

一、函数的单调性的判别法

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则有

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少；

（3）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常函数。

注：1）如果将定理 1 中的闭区间 $[a,b]$ 换成其他各种区间（包括无穷区间），定理 1 的其余条件不变，那么结论也成立。

2）如果函数在定义区间上连续，且在该区间上仅有有限个点处导数为零，而在其余各点处的导数均为正（或负），那么函数在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）的。

举例 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5

二、曲线的凹凸性与拐点

1．曲线凹凸性的定义

定义 1　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对于 I 的任意两点 x_1, x_2，恒有

$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，**则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的（或凹弧）；如果恒有**

$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，**则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的。**

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果曲线弧 $y=f(x)$ 上任意一点处的切线总位于曲线弧的的下方，则称该曲线弧在 $[a,b]$ 上是凹的（或凹弧）；

(2) 如果曲线弧 $y=f(x)$ 上任意一点处的切线总位于曲线弧的上方，则称该曲线弧在 $[a,b]$ 上是凸的（或凸弧）.

2. 曲线的凹凸性的判定定理

定理 2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，则有

(1) 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

证：$\forall x_1,x_2\in I$，记 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，利用一阶泰勒公式，有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x_0)^2$$

其中 ξ_1 介于 x_0 与 x_1 之间，ξ_2 介于 x_0 与 x_2 之间，两式相加，得

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right],$$

当 $f''(x)>0$ 时，$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)$，即 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

当 $f''(x)>0$ 时，$f(x_1)+f(x_2)<2f(x_0)$，即 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

注：定理 2 中若将区间 $[a,b]$ 换成其他各种区间时，结论也成立.

3. 曲线的的拐点

定义 3　连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点，称为这条曲线的拐点.

求连续曲线 $y=f(x)$ 在定义区间上的拐点的一般步骤：

（1）求出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点 x_0；

（2）判断点 x_0 的两侧，函数的二阶导数 $f''(x)$ 是否变号.

若 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

若 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧同号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 不是曲线的拐点.

举例 3-10，　3-11

举例 10（补充）求曲线 $y=f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的拐点。

解　函数定义域为 R，$y'=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，$y''=\frac{40}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{4x-1}{\sqrt[3]{x}}$，

令 $y''=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$，当 $x=0$时y''不存在 。

当 $x<0$ 时，$y''>0$，因此在 $(-\infty,0]$ 上这曲线是凹的。当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时，$y''<0$，因此在 $[0,\frac{1}{4}]$ 上这曲线是凸的。当 $x>\frac{1}{4}$ 时，$y''>0$，因此在 $(-\infty,0]$ 上这曲线是凹的。

当 $x=0$ 时，$y=0$，点 $(0,0)$ 是这曲线的一个拐点。当 $x=\frac{1}{4}$ 时，$y=-\frac{3}{32\sqrt[3]{2}}$，点 $(\frac{1}{4},-\frac{3}{32\sqrt[3]{2}})$ 也是这曲线的一个拐点。

讨论、思考：

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（　）。

（A）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

（**解**　应选（B）。提示：利用 $f'(x)$ 单调增加及 $f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad(0<\xi<1)$）

2.　高斯曲线 $y=e^{-x^2}$ 的凹区间为______，凸区间为______，拐点为______。

（**解**　曲线的凹区间为$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$，凸区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ **与**$\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$，拐点为$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$　**提示：**$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$。） **作业：**（课本）习题 4-3（1, 2, 4, 5, 8）
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 <u>5</u> 分钟，授新课 <u>80</u> 分钟，安排讨论 <u>4</u> 分钟，布置作业 <u>1</u> 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 5 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：**第三章　微分中值定理与导数的应用**

第四节　函数的极值与最大值、最小值及其在经济学中的应用

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解函数极值的概念、要牢固掌握函数取得极值的必要条件以及用一阶、二阶导数来确定函数极值的方法。
2. 理解函数最大值最小值的概念，会解简单的最大、最小值的应用题。
3. 培养学生运用函数极值思想解决分析经济学中的最值问题，培养训练学生运用数学思想分析、解决实际问题的能力。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：函数极值的概念，函数极值的求法； 函数的最大值最小值

难点：解最大、最小值的应用题。

主要内容

复习: 函数的单调性的判别定理

新授:

第四节　函数的极值与最大值、最小值及其在经济学中的应用

一、函数的极值及其求法

1. 极值的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义．如果对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}(\boldsymbol{x}_0)$，恒有

（1） $f(x) < f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；

（2） $f(x) > f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

函数的极大值与极小值 $f(x_0)$ 统称为极值．使函数取得极值的点 x_0 统称为极值点。

2. 函数取得极值的必要条件和充分条件

定理 1（极值的必要条件）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f(x_0)$ 为极值，则有

$$f'(x_0) = 0 .$$

定理 2（判别极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导， x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点或不可导点.

（1）当$x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f'(x)>0$，当$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0 处取得极大值；

（2）当$x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f'(x)<0$，当$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值；

（3）当$x \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处不取得极值。

定理 3（判别极值的第二充分条件）设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

（1）当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$为$f(x)$的极大值；

（2）当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$为$f(x)$的极小值.

二、最大值、最小值问题

1. 闭区间上连续函数的最大值、最小值问题

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则由闭区间上连续函数的最值定理知，$f(x)$在$[a,b]$上的最大值M和最小值m一定存在，并且最大值和最小值只可能在驻点、不可导点以及端点$x=a$，$x=b$处取得. 求出上述各点的函数值，其中最大者就是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值，而最小者就是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值。

举例 4-1 ,4-2, 4-3

2. 实际中的最大值、最小值问题

1）实际问题中，若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续且单调增，那么$M=f(b)$，$m=f(a)$；单调减时，情况则恰巧相反。

2）实际问题中，若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续且在$[a,b]$的内部只有一个极大值而无极小值，那么这个极大值就是函数在$[a,b]$上的最大值；如果在$[a,b]$的内部只有一个极小值而无极大值，那么这个极小值就是函数在$[a,b]$上的最小值

3）在实际问题中，如果能根据实际问题的意义，断定函数必定在所讨论的区间内取得最大值或最小值，而且区间内仅有一个驻点或不可导点，则可以判定函数在该点处取得最大值或最小值。

三、经济应用问题举例

例 1 （最大利润问题） 设某厂的成本函数为 $C(Q)=aQ^2+bQ+c$，需求函数为 $Q=(d-P)/e$，其中 $C(Q)$ 为成本，Q 为需求量产量，P 为价格，a，b，c，d，e 均为正常数，且 d>b，求利润最大时的产量及最大利润.

例 2 （最大收益问题） 某商品的需求函数为 $Q=Q(P)=75-P^2$，问 P 为多少时，总收益最大？

例 3 （经济批量问题） 某厂生产某种产品，其年销售量为 100 万件，每批生产需要增加准备费 1000 元，而每件的一年库存费为 0.05 元.如果年销售率为平均的，且上批售完后立即生产出下批(此时商品的库存数为批量的一半)，问应分为几批生产，能使采购费用及库存费之和最小？

例 4（最大税收问题） 某种商品的需求函数是 P=20-4x，企业的平均成本是 $\overline{C}(x)=2$，(1)若向企业每单位商品征收税款 t，试求其最大利润和税收最大时的 t 值.(2)试求当征收 25% 的销售税时，企业的最大利润.

讨论、思考：

1. 函数的最大、最小值与函数的极大、极小值有何区别？

（答 函数的最大、最小值与函数的极大、极小值的区别表现为：

（1）函数的最大、最小值与函数的极大、极小值的定义不同。最大值、最小值概念是就某一区间来考查的，是整体的，绝对的；而极大值、极小值概念是仅就某点的邻域来考查的，是局部的，相对的；

（2）同一函数的极小值有与极大值没有绝对的大小关系，极小值有可能大于它的极大值；而同一函数的最大值不会小于它的最小值；

（3）函数的最大、最小值与函数的极大、极小值的求法不同。）

作业： （课本）习题 4-4（1, 2, 3）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 6 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第四章　微分中值定理与导数的应用**

习题课

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒中值定理的条件和结论，知道这些定理在函数性态研究中所起的作用。

2. 能正确熟练地运用洛必达法则计算以“$\frac{0}{0}$”型与“$\frac{\infty}{\infty}$”型为主的未定式的极限问题。

3. 理解极值的概念，牢固掌握用导数判断函数单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值、最小值的求法。了解曲率的概念和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径。

4. 会用二阶导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数图形。

5. 训练学生能够运用导数解决经济学中的最大值、最小值问题，并会运用导数研究实际中曲线弯曲问题，达到学以致用的目的。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)定理；洛必达法则；函数的单调性的判定和求极值的方法。

难点：柯西(Cauchy)定理；泰勒(Taylor)定理。

主要内容

一、基本内容小结

1、微分中值定理

罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理；泰勒定理

2、导数应用

（1）洛必达法则；

（2）函数的单调性和曲线的凹凸性；

（3）函数的极值与最大值、最小值问题；

（4）函数图形的描绘

（5）弧微分、曲率

二、典型例题讲解

本章典型考题类型：

●**验证中值定理的条件成立；**（总习题四　1（1））

●**应用罗必达法则求未定式的极限；**（总习题四　1）

●**方程根的讨论（利用罗尔定理或函数的性态）；**（总习题四　3）

●**单调性与极值、凹凸性与拐点；**（总习题四　8）

●**不等式证明（利用单调性或利用中值定理）；**（总习题四　2）

●**描绘简单函数的图形；**（总习题四　13）

●**中值定理证明题。**（总习题四　4）

讨论、思考：

1．设 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，试求 k 的取值范围。

（**解**　将原方程变形为 $k=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$（$x>0$），令 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$（$x>0$），$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}=\dfrac{3-x^2}{x^4}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{3}$。当 $x\in(0,\sqrt{3})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增；当 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减。$f(\sqrt{3})=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x^3}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，从而若原方程有且仅有一个实根，则

$$k=\frac{2}{9}\sqrt{3}\text{ 或 }k\le 0\text{。）}$$

2. 函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

（**解**　在 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两端关于 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$$

令 $y'=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$。将 $x=1$ 代入方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，得 $y^3+3y-4=0$，解之得 $y=1$；将 $x=-1$ 代入方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，得 $y^3+3y=0$，解之得 $y=0$，故驻点为 $(1,1),(-1,0)$。

在 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ 两端关于 x 求导，得

$$6x+3(y^2+1)y''+6y(y')^2=0$$

将 $x=1,y(1)=1,y'(1)=0$ 代入上式，得 $y''(1)=-1<0$，所以极大值点为 $x=1$，极大值为 $y(1)=1$；将 $x=-1,y(-1)=0,y'(-1)=0$ 代入上式，得 $y''(1)=1>0$，极小值点 $x=-1$，

极小值 $y(-1)=0$ 。） **作业：** 掌握本次课所讲题目与方法，总习题四、完成“回顾与预习”.
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 <u>80</u> 分钟，授新课 <u>0</u> 分钟，安排讨论 <u>9</u> 分钟，布置作业 <u>1</u> 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 1 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第十一章　无穷级数**

第一节　常数项级数的概念和性质

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解常数项级数的概念、理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数和的概念。

2. 掌握级数的基本性质及级数收敛的必要条件。

3. 掌握几何级数及调和级数的敛散性。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：常数项级数收敛、发散的概念、级数的基本性质。

难点：利用定义判定级数的敛散性。

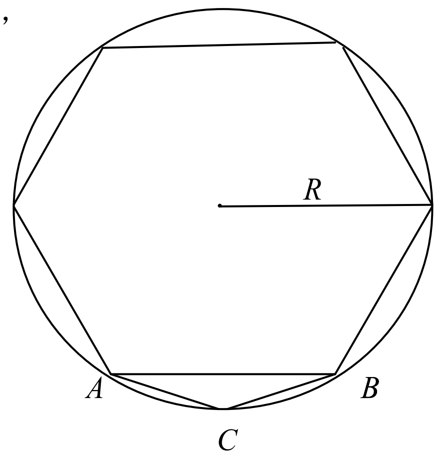
主要内容

第一节　常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

引例　计算半径为 R 的圆面 A。

在半径为 R 的圆内作内接正六边形，其面积记为a_1（图 10−1)，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值。再以这正六边形的每一个边为底边，在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形，得圆内接内接正十二边形，设这六个等腰三角形的面积为a_2，那么 a_1+a_2（即圆的内接正十二边形的面积）就是圆面积 A 的一个较好的近似值。同样以这正十二边形的每一个边为底边，在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形，得圆内内接正二十四边形，设这十二个等腰三角形的面积为 a_3，于是 $a_1+a_2+a_3$（即的内接正二十四边形的面积）是圆面积 A 的一个更好近似值。如此继续进行 n 次，内接正3×2^n边形的面积就逐渐逼近圆面积，即



（图 10-1）

$$A\approx s_n=a_1+a_2+\cdots$$

显然n越大，则近似程度越好。如果内接正多边形的边数无限增加，即n无限增大，那么和 $s_n=a_1+a_2+\cdots$　的极限就是所要求的圆面积 A。这时和数中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数依次相加得式子。

将上面面积问题抽象出来，就得到无穷级数的一般概念。

定义 1　设给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots \quad \cdots$，那末表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad \cdots$$

就称为**（常数项）无穷级数**，简称**（常数项）级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad \cdots, \tag{1-1}$$

其中第 n 项 u_n 称为级数（1-1）的**一般项或通项**.

上述级数的定义只是一个形式上的定义，怎样理解无穷级数中无穷多个相加呢？联系到上面的实例， 我们可以从有限项的和出发，观察它们的变化趋势，由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作级数（1）前面 n 项的和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{1-2}$$

s_n 称为该级数的**部分和**. 当 n 依次取 1，2，3，…时，级数的部分和就构成一个新的数列：

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \cdots,\ s_n = u_1 + u_2 + \cdots \quad,\ \cdots \tag{1-3}$$

根据这部分和数列有没有极限，我们引进无穷级数（1-1）的收敛与发散的概念。

定义 2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 这时极限 s 叫做这级数的和，记为

$$s = u_1 + u_2 + \cdots \qquad \cdots,$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，这时级数（1-1）没有和。

显然，当级数收敛时，其部分和 s_n 是级数和 s 的近似值，它们之间的差

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \qquad \cdots$$

称为**级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的余项**。

举例 1-3

例 3　当 $|q|<1$ 时，等比级数（几何级数）$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ 收敛，且和为 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q|\geq 1$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ 发散。（几何级数是一个常用级数，读者应熟悉其敛散性。）

二、收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念，可以得出常数项级数的以下基本性质。

性质 1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 s，则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 ks；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则当 $k\neq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也发散。

换言之，性质 1 表明：**级数的每一项同乘一个非零常数后，它的敛散性不会改变。**

性质 2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于和 s、σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必收敛，且其和为 $s\pm\sigma$。

注：（1）性质 2 表明，两个收敛级数逐项相加（逐项相减）所得的级数仍收敛。

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必定发散。（利用性质 2 易证）

（3）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 不一定发散。

例如，级数 $1+1+1+1+\cdots$ 发散；级数 $-1-1-1-1-\cdots$ 发散，但

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

却收敛。

性质 3　在级数中去掉、加上或改变有限项，不改变级数的敛散性。

性质 4　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这个级数的各项间任意加括号所得的级数

$$(u_1+\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \tag{1-4}$$

仍收敛，且其和不变。

注:（1）性质 4 推论：如果加括号后所成的数列发散，那么原来级数也发散。

（2）收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛．例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的。

（3）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则添括号后所得的新级数不一定发散。

（4）如果级数的各项都大于零，且按某规律加括号后所得的级数收敛，则去括号后所得的级数也收敛。

性质 5（级数收敛的必要条件） 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 。

注：（1）性质 5 表明：若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 不存在时，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定发散。

（2）性质 5 表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 。**但反之不然。也就是说**性质 5 的逆命题不正确，即级数的一般项的极限为零，并不一定能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 因此级数的一般项趋于零只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件. 有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的。

举例 4

例 4. 证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \quad \frac{1}{n} \quad \cdots$$

虽然它的一般项 $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ （$n \to \infty$），但是它是发散的。（这是一个常用级数，读者应熟悉其敛散性。）

讨论、思考：

1. 记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 能否既表示级数又表示级数的和？

（**答：** 记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 表示级数，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \cdots$ 。不论级数收敛还是发散，级数都可以用记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 表示，当且仅当级数收敛时，记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 才表示这级数的

和，即 $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$。） **作业：**（课本）习题 11－1（1,2,3,4）
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：　√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：　√讲授　讨论　指导　其他
教学资源：　√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他

第 2 次课的教学整体安排

授课时间	第 周 周 第 节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)： **第十一章 无穷级数**

第二节 正项项级数的审敛法

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1． 理解正项级数的概念、掌握正项级数收敛的充要条件。

2. 掌握正项级数的比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法。

3. 掌握几何级数和 $p-$级数的敛散性。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：正项级数的审敛法。

难点：判断正项级数审敛法如何选择审敛方法。

主要内容

一、正项级数及其审敛法

1. 正项级数的定义：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $u_n \geq 0$（$n=1,2,\cdots$），这种级数称为**正项级数**。

2. 正项级数收敛的充要条件：

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots$ $\cdots$，由于 $u_n \geq 0$，其部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad (n=1,2,\cdots)$$

满足：$s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n$ $(n=1,2,\cdots$ ，即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 是一个单调增加数列，于是有下列两种可能情形：

（1）当 $n \to \infty$ 时，$s_n \to +\infty$，此时正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（2）正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界，根据单调有界的数列必有极限的准则知，$\lim_{n\to\infty} s_n$ 必定存在，于是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛．因此，我们得到以下的基本定理。

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界。

推论：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$。

以这个定理为基础，可以导出判定正项级数是否收敛的几种方法。

3. 正项级数审敛的方法

定理 2 （比较审敛法）设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n$ $(n=1,2,\cdots$ 。

（1）　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

（2）　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

证　由定理 1 可知，当级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，其部分和数列必有界，于是有$M>0$，使得$0 \le \sum_{k=1}^{n} v_k \le M$，又$u_n \le v_n (n=1,2,\cdots$ ，故

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} u_k \le \sum_{k=1}^{n} v_k \le M$$

因而级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列有界，由定理 1 知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$必发散．否则若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，由上面已证明的结论，可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，这与级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

注意到级数的每一项同乘不为零的常数k，不会影响级数的收敛性，我们可得如下的推论：

推论　设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，并且$u_n \le kv_n$（$k>0$，$n \ge N$，N为某一自然数）.（1）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；（2）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

举例 1-4

例 3 中的 $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散。（$p-$级数是一个常用级数，读者应熟悉其敛散性。）

为了应用上的方便，下面我们给出比较审敛法的极限形式。

定理 3（比较审敛法的极限形式）　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，

（1）如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ \ (0\le l<+\infty)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证　（1）由极限的定义可知，对$\varepsilon=1$，且存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\frac{u_n}{v_n}<l+1，\text{即}\quad u_n<\left(l+1\right)v_n$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，根据比较审敛法的推论，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）　按已知条件$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}$存在，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则由结论（1）必有$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，但已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不可能收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

极限形式的比较审敛法，是在两个正项级数的一般项均趋向于零的情况下，其实是比较它们的一般项作为无穷小量的阶．定理表明：当$n\to\infty$时，如果u_n是与v_n同阶或是比v_n高阶的无穷小，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；如果u_n是与v_n同阶或是比v_n低阶的无穷小，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

举例 5

为了顺利地使用比较审敛法，读者须记住一些已知其收敛性的级数，如等比级数、调和级数、$p-$级数等，作为比较的标准。

将所给级数与等比级数比较，我们能得到在实用上很方便的比值审敛法和根值审敛法。

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔（D’Alembert）判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数$(u_n>0)$，

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \quad ,$$

则当$\rho<1$时级数收敛；　$\rho>1$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$）时级数发散；　$\rho=1$时，级数可能收敛也可能发散.

证　（i）当$\rho<1$．取一个适当小的正数ε，使得$\rho+\varepsilon=r<1$，根据数列极限定义，存在正整数N，当$n\geq N$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r$$

因此

$$u_{N+1}<ru_N,\ u_{N+2}<ru_{N+1}<r^2u_N,\ u_{N+3}<ru_{N+2}<r^3u_N,\ \cdots\ 。$$

而级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^ku_N$收敛（公比$r<1$），根据定理 2 的推论，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（ii）当$\rho>1$．取一个适当小的正数ε，使得$\rho-\varepsilon>1$．根据极限定义，存在正整数N，当$n\geq N$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1$$

也就是

$$u_{n+1}>u_n$$

所以当$n\geq N$时，级数的一般项u_n是随n的增大而增大的，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$。根据级数收敛的必要条件可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

类似地，可以证明当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（iii）当$\rho=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛也可能发散.

例如$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，不论$p$为何值都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^p=1$$

但 $p>1$ 时级数收敛，当 $p\le 1$ 时级数发散，因此只根据 $\rho=1$ 不能判别级数的收敛性。

举例 6-8

定理 5（根值审敛法，柯西（Cauchy）判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\quad ,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；　$\rho>1$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$）时级数发散；$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散。（定理 4 的证明与定理 3 相仿，这里从略。）

举例 9-10

讨论、思考：

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是正项级数，满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n=1,2,\cdots$ ，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。以下证明是否正确?

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}<1$，又由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n=1,2,\cdots$ ，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

（**答**　上述证明不正确，因为比值审敛法的逆命题不成立。即根据正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，不能推出 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在且小于 1 的结论，并且即使 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在，也不能推出 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 的结论。例如

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right)$ 收敛，但 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 不存在；

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在但等于 1。

正确的证明如下：

由已知条件可得$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \cdots$　　b_1，于是$0 \le a_n \le \dfrac{a_1}{b_1} b_n$　$(n=1,2,\cdots$ ，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，根据比较审敛法，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都是正项级数，满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$　$(n=1,2,\cdots$ ，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是否发散，为什么？

（**答**　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$一定发散。证明与第 1 题类似从略。）

作业：习题 11-2（1，2，3，4）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他

教学资源：√多媒体　　　模型　　　实物　　挂图　　　音像　　其他

第 3 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　　第　　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第十一章　无穷级数**

第三节　任意项项级数的绝对收敛与条件收敛

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1．理解交错级数的定义，掌握交错级数的莱布尼兹定理。

2. 了解级数绝对收敛与条件收敛的概念及两者的关系。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：交错级数的莱布尼兹定理、绝对收敛与条件收敛的概念

难点：任意项级数的审敛方法的选择。

主要内容

复习：（1） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$ 。

（2）正项级数的审敛法。

第三节　常数项级数的审敛法

二、交错级数及其审敛法

交错级数是指它的各项是正负交错（或负正交错）的级数．设 $u_n > 0(n = 1,2,3\cdots$ ，交错级数的一般形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots ,$$

或
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots 。$$

下面我们按 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的形式来证明交错级数的一个审敛法。

定理 6 （莱布尼茨(Leibniz)判别法） 设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n > 0$ ，$n = 1,2,\cdots$ **满足如下条件：**

（i） $u_n \ge u_{n+1}$　$(n = 1,2,3,\cdots$ **；**

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ **，**

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ **收敛，且其和** $s \le u_1$**，其余项** r_n **的绝对值** $|r_n| \le u_{n+1}$.

证　先证明部分和数列 $\{s_n\}$ 的偶子列 $\{s_{2n}\}$ 的极限存在。为此把的偶数项 s_{2n} 写成两种形式：

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots \qquad - u_{2n}) .$$

及

$$s_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots \qquad - u_{2n-1}) + u_{2n}]$$

根据由条件（i）知，所有括号中的差都是非负的，由第一种形式知数列 $\{s_{2n}\}$ 是单调增加的，由第二种形式可 $s_{2n} \le u_1$，即数列 $\{s_{2n}\}$ 是有上界的。于是，根据单调有界数列必有极限的准则知道，$\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$，则 $s \le u_1$.

先证明部分和数列 $\{s_n\}$ 的奇子列 $\{s_{2n+1}\}$ 的极限也是 s。事实上，我们有

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} 。$$

结合条件（ii）知 $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = +0 = s 。$$

综合以上两种情况，就证明了 $\lim_{n\to\infty} s_n = s \le u_1$。即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛于 s，且 $s \le u_1$.

最后，不难看出余项 r_n 可以写成

$$r_n = s - s_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + n_{n+3} - u_{n+4} + \cdots \ ,$$

其绝对值

$$|r_n| = |s - s_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + n_{n+3} - u_{n+4} + \cdots ,$$

上式右端也是一个交错级数，它满足满足收敛的两个条件，所以该级数必收敛，且其和不大于级数的首项，也就是说

$$|r_n| \le u_{n+1} 。$$

证明完毕。

三、绝对收敛与条件收敛

设有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots \qquad \cdots ,$$

其中$u_n(n=1,2,3\cdots$ 为任意实数。这样的级数称为**任意项级数**。任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 各项的绝对值所构成的正项级数是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$。如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**．容易知道，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$是绝对收敛级数，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$是条件收敛级数。

级数绝对收敛与级数收敛有以下重要关系：

定理 7　绝对收敛的级数必收敛，即若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛。

证　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛．令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad (n=1,2,\cdots .$$

由于$-|u_n|\le u_n\le|u_n|$，就有$0\le u_n+|u_n|\le 2|u_n|$，得到 $0\le v_n\le|u_n|$　$(n=1,2,\cdots$ ．由比较审敛法知道，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛．而$u_n=2v_n-|u_n|$，由收敛级数的基本性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．定理证毕.

注：（1）定理 7 的逆定理不一定成立．也就是说：虽然级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$却不一定收敛 ．例如交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$是收敛的，但若将级数的对应项取绝对值，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$为调和级数却是发散的。

（2）定理 7 表明，对于任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果我们用正项级数的审敛法判定出级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。这就使得任意项级数的收敛性判别问题，转化成为正项级数的收敛性判别问题。

（3）一般说来，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，我们不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散．但是，如果我们用比值审敛法或根值审敛法根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho>1$ 判定出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则我们可以断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定发散。这是因为从 $\rho>1$ 可推知 $|u_n| \not\to 0$（$n\to\infty$），从而 $u_n \not\to 0$（$n\to\infty$），因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的．

讨论、思考：

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否一定收敛？

（**答**：当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 一定收敛；当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不一定收敛。

例如：交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的，但若将级数的对应项取绝对值，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数却是发散的，也就是说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛。）

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否一定发散？

（**答**：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 一定发散。证明如下（采用反证法）：

假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，根据定理 7 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，这与已知级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散相矛盾。故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ 一定发散。） **作业：**（课本）习题 11-3（1，2，,3）
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 5 分钟，授新课 80 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 4 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　**第十一章　无穷级数**

第三节　泰勒级数与幂级数

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 了解函数项级数的收敛域和和函数的概念。

2. 掌握幂级数收敛半径、收敛区间（指开区间）以及收敛域的求法。

3. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（连续性、逐项求导与逐项积分）。

4. 会求一些简单幂级数的和函数。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：幂级数收敛半径、收敛区间（指开区间）以及收敛域的求法；一些简单幂级数的和函数的求法。

难点：幂级数的和函数的求法。

主要内容

一、函数项级数的概念

设 $u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots$　　$\cdots$ 是定义在同一区间 I 上的函数列

那末表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots\qquad\cdots\tag{3-1}$$

称为定义在区间 I 上的**（函数项）无穷级数**，简称**（函数项）级数**.

对于每一固定值 $x_0\in I$，函数项级数（1）就成为常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots\qquad\cdots.\tag{3-2}$$

如果级数（3-2）收敛，则称点 x_0 是级数（3-1）的**收敛点**；如果级数（3-2）发散，则称点 x_0 是级数（3-1）的**发散点**. 函数项级数（3-1）的所有收敛点的全体称为它的**收敛域，**所有发散点的全体称为它的**发散域.**

对应于收敛域内的任意一个数 x，函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s . 当 x 在它的收敛域内变化时，和也随之变化，这样，在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，通常 $s(x)$ 称为函数项级数的**和函数**，这个函数的定义域就是级数的收敛域（记作 D ），并写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots\qquad\cdots.\qquad x\in D$$

把函数项级数（3-1）的前 n 项部分和记作 $s_n\left(x\right)$，则在收敛域 D 上有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\left(x\right)=s\left(x\right)$.

同样称 $r_n\left(x\right)=s\left(x\right)-s_n\left(x\right)$ 为函数项级数的**余项**（当然，只有当 x 在收敛域上 $r_n\left(x\right)$ 才有意义），则

$$\lim_{n\to\infty}r_n\left(x\right)=0.\qquad x\in D$$

举例 1

二、泰勒级数

在第三章第一节中我们看到：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有直到（n +1）阶的导数，则 $f(x)$ 可写成 n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\quad（4-1）$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ 是 x 与 x_0 之间的某个值．这时，在该邻域内 $f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\quad\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

来近似表达，并且误差等余项的绝对值 $\left|R_n(x)\right|$．显然，如果 $\left|R_n(x)\right|$ 随着 n 的增大而减小，那么我们就可以用增加多项式 $p_n(x)$ 的项数的办法来提高精确度.

由此可以设想，如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots$ $\cdots$，则有可能

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\quad\frac{f^{(n)}(\ )}{n!}\quad\cdots$$

上式右端的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 的**泰勒级数**．显然，当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x_0)$，但除了 $x=x_0$ 外，它是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$？关于这些问题，有下述定理.

定理 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内

能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \qquad (x\in U(x_0)).$$

证　先证必要性．设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开为泰勒级数，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (4\text{-}2)$$

对一切 $x\in U(x_0)$ 成立．我们把 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式（4-1）写成

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x), \qquad (4\text{-}1')$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数的前（n ＋1）项之和，因为由（4-2）式有

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x)=f(x)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=f(x)-f(x)=0.$$

这就证明了条件是必要的.

再证充分性，设 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ 对一切 $x\in U(x_0)$ 成立. 由 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式（4-1′）有

$$s_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x),$$

令 $n\to\infty$ 取上式的极限，得

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x),$$

即 $f(x)$ 的泰勒级数在 $U(x_0)$ 内收敛，并且收敛于 $f(x)$．因此条件是充分的．定理证毕.

在 $f(x)$ 的泰勒级数中取 $x_0=0$，得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \qquad \cdots \qquad (4\text{-}3)$$

此级数称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数是 x 的幂级数，现在我们要研究，如果 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数，那末这种展开式是否唯一？唯一时它是否一定就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数（4-3）？关于这些问题的结论，有下述定理 2.

定理 2　如果 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 的某一邻域内具有各阶导数，且能展开成 x 的幂级数，那末这种展开式唯一，其展开式就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数数（4-3）.

证　如果 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的某邻域 $(-R,R)$ 内能展开成 x 的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad \cdots \tag{4-4}$$

对一切 $x\in(-R,R)$ 成立，那末根据幂级数在收敛区间内可以逐项求导，有

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots \qquad \cdots,$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots \qquad \cdots,$$

$$f'''(x)=3!a_3+\cdots \qquad \cdots,$$

…………

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots \qquad \cdots,$$

…………

把 $x=0$ 代入以上各式，得

$$a_0=f(0)\,,\ a_1=f'(0)\,,\ a_2=\frac{f''(0)}{2!}\,,\ \cdots \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \cdots.$$

这就表明函数的幂级数展开式是唯一的.

由函数 $f(x)$ 的展开式的唯一性可知，如果 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数，那末这个幂级数就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数．下面讨论把函数 $f(x)$ 展开为幂级数的方法.

三、幂级数及其收敛性

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad \cdots, \tag{3-3}$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots \qquad \cdots, \tag{3-3$'$}$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots$　$\cdots$ 叫做**幂级数的系数**.

对于幂级数(3-3′)只要作变换 $z=x-x_0$，就可以化为（3-3）的形式，因此下面主要讨论幂级数（3-3）. 我们首先要问幂级数（3-3）的收敛域是怎样的？显然幂级数（3-3）不是对所有 x 都是发散的，因为当 $x=0$ 它是收敛的．但一般地回答这个问题，必须先来证明

下面的定理.

定理 1（阿贝尔（Abel）定理）如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x=x_0$（$x_0\neq 0$)处收敛，则对于适合$|x|<|x_0|$的任何$x$值，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛；反之，如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在$x=x_0$（$x_0\neq 0$）时发散，则对于适合$|x|>|x_0|$的任何$x$值，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散.

证　先证定理的第一部分. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n {x_0}^n$收敛，由级数收敛的必要条件知：

$$\lim_{n\to\infty}a_n {x_0}^n=0$$

于是存在一个常数M，使得

$$\left|a_n {x_0}^n\right|\le M \quad (n=0,1,2,\cdots .$$

又幂级数（3-3）的一般项的绝对值可写为

$$\left|a_n x^n\right|=\left|a_n {x_0}^n\frac{x^n}{{x_0}^n}\right|=\left|a_n {x_0}^n\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

由于$|x|<|x_0|$，可知$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$，从而等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛，所以级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛，也就是级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

再用反证法证明定理的第二部分.倘若幂级数(3-3)当$x=x_0$时发散，而又存在一点x_1，满足$|x_1|>|x_0|$，使级数（3-3）收敛，则根据已经证明的定理的第一部分知，级数（3-3）在$x=x_0$处绝对收敛，这与所设矛盾. 定理得证.

定理 1 表明：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x_0$（$x_0\neq 0$）处收敛，那末该幂级数在开区间$(-|x_0|,|x_0|)$内必处处收敛；若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x_0$（$x_0\neq 0$）处发散，那末该幂级数必在开区间$(-\infty,-x_0)$和$(x_0+\infty,)$内都发散.

设已给幂级数在数轴上既有收敛点（不仅是原点）也有发散点. 现在从原点沿着数轴向右方走，最初只遇到收敛点，然后就只遇到发散点. 这两部分的界点可能是收敛点也可能是

发散点．从原点沿数轴向左方走情形也如此．两个界点 P 与 P' 在原点的两侧，且由定理 1 可以证明它们到原点的距离是一样的(图 10—2)

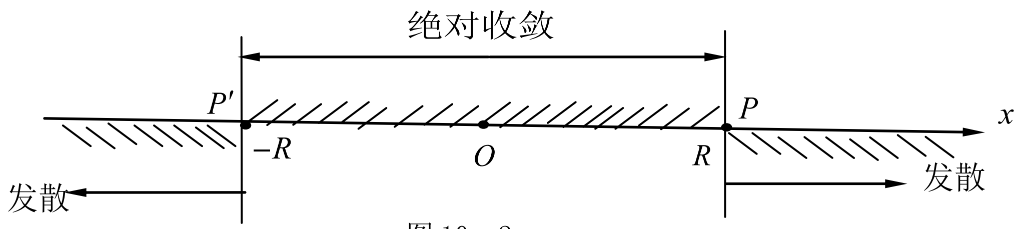


图 10—2

从上面的几何说明，我们就得到重要的推论：

推论　如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都敛，则必存在一个完全确定的正数 R，它具有这样的性质：

当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散．

正数 R 通常叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**．开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛区间**．再由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=\pm R$ 处收敛性就可以决定它的收敛域是 $(-R,R)$、$[-R,R)$、$(-R,R]$、$[-R,R]$ 这四个区间之一．

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，这时收敛域只有一点 $x=0$，但为了方便起见，我们规定这时收敛半径 $R=0$；如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，这时收敛域为 $(-\infty,+\infty)$．

关于幂级数的收敛半径的求法，有下列的定理．

定理 2　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两相的系数 a_n、a_{n+1} 满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，

则收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, & \text{当}0<l<+\infty, \\ +\infty, & \text{当}l=0, \\ 0, & \text{当}l=+\infty.\end{cases}$$

证明： 考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的各项绝对值所成的级数

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots \qquad \cdots \qquad (3\text{-}4)$$

这个级数相邻两相之比为

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^x}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$$

（i）如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$（$0<l<+\infty$）存在，根据比值审敛法，则当$l|x|<1$，即$|x|<\frac{1}{l}$时，级数（3-4）收敛，从而级数（3-3）绝对收敛；当$l|x|>1$，即$|x|>\frac{1}{l}$时，幂级数（3-4）发散并且从某一个n开始$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_n x^n|$，因此当$n\to\infty$时$|a_n x^n|$不趋于零，所以$a_n x^n$也不趋于零，从而级数（3-3）发散．于是收敛半径$R=\frac{1}{l}$.

（ii）如果$l=0$，对任何$x\neq 0$都有$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^x}\right|\to 0$（$n\to\infty$），所以（3-4）收敛，从而级数（3-3）绝对收敛．于是$R=+\infty$.

（iii）如果$l=+\infty$，则对于除去$x=0$外的其他一切x值，级数（3-3）必发散，否则由定理 1 知道将有点$x\neq 0$使级数（3-4）收敛．于是$R=0$.

举例 2-6

四、幂级数的运算

幂级数具有下列性质（略去证明）：

性质 1　设有两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad \cdots \qquad (-R_1,R_1)\ (R_1>0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \qquad \cdots \qquad (-R_2,R_2)\ (R_2>0)$$

则当$|x|<R=\min\{R_1,R_2\}$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad \cdots \cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \quad \cdots$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots \quad \cdots$$

性质 2　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域 I 上连续.

性质 3　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，并且有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad(|x|<R),\tag{3-5}$$

即求导运算与求和运算可互换次序.

性质 4　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ ,\ (x\in I)\tag{3-6}$$

即积分运算与求和运算可互换次序.

综上所述，任何一个幂级数，只要它的收敛半径大于零，那末就可以在它收敛区间内逐项求导与逐项积分，而且所得的结果仍是幂级数，它们的收敛半径不变.

例如，当 $|x|<1$ 时

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \quad \cdots$$

故在区间 $(-1,1)$ 内逐项求导，得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots \quad \cdots \quad |x|<1.$$

又在区间 $(-1,1)$ 内从 $x=0$ 到 x 逐项积分，得

$$\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=\int_0^x 1dx+\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx+\cdots \quad \cdots$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots \quad \cdots$$

即　$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots \quad \cdots \quad |x|<1.$$

举例 7
讨论、思考： **1.** 确定幂级数的收敛半径有哪些常见的方法？ （**答**：求幂级数的收敛半径是幂级数的基本运算之一，其常见方法有： （1）利用收敛半径的定义。即 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径当且仅当 $\lvert x \rvert < R$ 时幂级数收敛，当 $\lvert x \rvert > R$ 时幂级数发散。 （2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = l$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = l$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \neq 0, \\ +\infty, & l = 0, \\ 0, & l = +\infty. \end{cases}$ （3）若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \lvert x_0 \rvert$。 （4）幂级数逐项积分或逐项求导后，所得幂级数的收敛半径不变。） **作业：**（课本）习题 11-4 （2,3）
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 0 分钟，授新课 85 分钟，安排讨论 4 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他
教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 5 次课的教学整体安排

授课时间	第　周 周　　第　　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　　**第十一章　无穷级数**

第五节　函数展开成幂级数的应用

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次)：

1. 了解函数展开成幂级数的充分必要条件。

2. 掌握 e^x、$\sin x$ 、$\cos x$ 、$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^m$ 的麦克劳林展开式，并会利用这些展开式将一些简单的函数展开成幂级数。

3. 了解幂级数展开式在近似计算中的应用。

教学内容（包括基本内容、重点、难点)：

重点：一些简单函数展开成幂级数。

难点：用直接展开法将函数展开成幂级数。

主要内容

第五节　函数展开成幂级数的应用

前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质．但在许多应用中，更重要的却是相反的问题：即给定函数 $f(x)$ ，要考虑它是否能在某区间内“展开成为幂级数”　，就是说，是否能找到一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$ ．如果能找到这样的幂级数，我们就说，**函数 $f(x)$ 在该区间内能展开成幂级数**.

二、函数展开成幂级数

把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，通常有直接展开和间接展开两种方法.

直接展开法 ：　要把函数 $f(x)$ 直接展开成 x 的幂级数，可按照下列步骤进行：

第一步　求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots$　　　　$\cdots$（如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处某阶导数不存在，就停止进行，例如在 $x=0$ 处，$f(x)=x^{7/3}$ 的三阶导数不存在，它就不能展开为 x 的幂级数.

第二步 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值，

$$f(0), f'(0), f''(0), \cdots \qquad \cdots .$$

第三步 写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \qquad \cdots ,$$

并求出收敛半径R.

第四步 考察当x在收敛区间$(-R,R)$内时余项$R_n(x)$的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad（\xi 在 0 与 x 之间）$$

是否为零．若为零，则函数$f(x)$在区间$(-R,R)$内的幂级数展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \qquad \cdots \qquad (-R<x<R).$$

若不为零，幂级数虽然收敛，但它的和函数并不是所给的函数$f(x)$．就是说，函数$f(x)$不能展开为x的幂级数.

举例 1-2

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \qquad \cdots \quad (-\infty<x<+\infty). \qquad (4\text{-}5)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad \cdots \quad (-\infty<x<+\infty). \qquad (4\text{-}6)$$

从以上几例可以看出，用直接展开法将函数展开成幂级数，必须按公式$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$计算幂级数的系数，最后考察余项$R_n(x)$是否趋于零．这种方法计算量较大，而且研究余项极限是否趋于零更为复杂，因此用直接展开法求一般函数的幂级数展开式比较困难．下面我们介绍一种比较简单的方法：**间接展开法**．这种方法是利用一些已知的函数展开式、幂级数的运算（如四则运算，逐项求导，逐项积分）以及变量代换等，将所给函数展开成幂级数．这样做不但计算简单，而且可以避免研究余项.

举例 3-9

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad \cdots \quad (-\infty<x<+\infty) \qquad (4\text{-}7)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad \cdots \quad (-1<x\le 1) \qquad (4\text{-}8)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots \qquad \cdots \qquad . \qquad (4\text{-}9)$$

必须指出，假定函数$f(x)$在开区间$(-R,R)$内的展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\qquad (-R<x<R)$$

已经得到，如果上式的幂级数在该区间的端点 $x=R$（或 $x=-R$）仍收敛，而函数 $f(x)$ 在 $x=R$（或 $x=-R$）处有定义且连续，那么根据幂级数的和函数的连续性，该展开式对 $x=R$（或 $x=-R$）也成立.

二、函数的幂级数展开式的应用

函数的幂级数展开式的应用是很广泛的，可用于近似计算、可用于计算积分、可用于解微分方程、可用于表示非初等函数并用它进行一些运算和证明等等．现举例如下：

1、 利用函数的幂级数展开式进行近似计算.

举例 11-5.1　5.2

2、 利用级数计算积分.

举例 11-5.3

3、欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（这里 $\sqrt{-1}=i$）的证明.

讨论、思考：

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数，试问 $f(x)$ 是否总能在 x_0 点展开成泰勒级数？

（**答**：若 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数，则可有 $f(x)$ 写出级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

即此时“$f(x)$ 在点 x_0 有泰勒级数”。而由函数可以展开成泰勒级数的充要条件知，只有当余项 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ **时**，$f(x)$ 在点 x_0 处才能展开成泰勒级数。故“有泰勒级数”与“可展开成泰勒级数”是两个不同的概念。

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0,\\ 0,\quad x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点各阶导数都存在，且等于零，于是得泰勒级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{0}{n!}x^n=0$，此函数的和函数 $s(x)=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$。这说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的泰勒级数在 $U(0)$ 内不收敛于 $f(x)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 不能展开成泰勒级数。）

作业：（课本）习题 11-4（4,5） 11-5（1,3）

参考资料（含参考书、文献等）：

《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社

教学过程设计：复习 <u>0</u> 分钟，授新课 <u>85</u> 分钟，安排讨论 <u>4</u> 分钟，布置作业 <u>1</u> 分钟

授课类型：√理论课　讨论课　实验课　练习课　其他

教学方式：√讲授　　讨论　　指导　　其他
教学资源：√多媒体　　模型　　实物　　挂图　　音像　　其他

第 6 次课的教学整体安排

授课时间	第　周　周　第　节	课时安排	**2**

授课题目(教学章、节或主题)：　　**第十一章　无穷级数**

习题课

教学目的、要求（分掌握、理解、了解三个层次）：

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及级数收敛的必要条件，掌握几何级数和 p 级数的敛散性，掌握正项级数的比较判别法、比值判别法、根值判别法。掌握交错级数的莱布尼茨定理，了解级数绝对收敛与条件收敛的概念以及两者的关系。

2. 了解函数项级数的收敛域与和函数的概念，掌握幂级数的收敛半径、收敛区间（指开区间）以及收敛域的求法。了解幂级数和函数在其收敛区间内的基本性质（连续性、逐项求导与逐项求积）。会求一些简单幂级数的和函数。了解函数展开成泰勒级数的充分必要条件。掌握 e^x、$\sin x$ 、$\cos x$ 、$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^m$ 的麦克劳林展开式，并会利用这些展开式将一些简单的函数展开成幂级数。了解幂级数展开式在近似计算中的应用。

教学内容（包括基本内容、重点、难点）：

重点：几何级数和 p 级数的敛散性；正项级数的比值判别法；交错级数的莱布尼兹定理；幂级数收敛半径、收敛区间（指开区间）以及收敛域的求法；一些简单幂级数的和函数的求法；一些简单函数展开成幂级数。

难点：正项级数的比较判别法、根值判别法；幂级数的和函数的求法；函数展开成幂级数；

主要内容

一、基本内容小结

1、常数项级数的概念和性质 。

2、常数项级数的审敛法。

3、幂级数。

二、典型例题讲解

本章典型考题类型：

●**常数项级数敛散性的判断**；（总习题十一　1，3，4）

●**求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域及和函数**；（总习题十一　5，6）

●**按要求将函数展开成幂级数**；（总习题十一　9）

讨论、思考：

1. 如何求收敛幂级数在其收敛域内的和函数？

（答　通常求收敛幂级数在其收敛域内的和函数有两种方法

（1）　利用幂级数和函数的定义求幂级数在其收敛域内的和函数。

记 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k x^k$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$ （和函数）

例如求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在其收敛域内 $(-1,1)$ 内的和函数。因为 $s_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{1-x^n}{1-x}$ ，则

$$\text{和函数 } s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1) \text{ 。}$$

（2）利用常用函数的麦克劳林展开式及幂级数的性质（有理运算性质、逐项求导、逐项积分）求幂级数在其收敛域内的和函数。常用函数的麦克劳林展开式如下

（i）$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ ，　$-1<x<1$

（ii）$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ ，　$-\infty<x<+\infty$

（iii）$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ，　$-\infty<x<+\infty$

（iv）$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ ，　$-\infty<x<+\infty$

（v）$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ ，　$-1<x\le 1$

（3）有时求幂级数在其收敛域内的和函数也可以借助微分方程。

例如要求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$ 在其收敛域 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数。

解 1　由于 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$ $\cdots$，$e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\cdots$ $\cdots$，因此 $e^x+e^{-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$ ，故 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ，$-\infty<x<+\infty$ 。

解 2　因 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$，则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$，从而 $$S'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}=e^{x}$$ 解该一阶线性微分方程，得 $S(x)=e^{-\int dx}(\int e^{x}e^{\int dx}dx+C)=e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$ 又当 $S(0)=1$，故 $C=\frac{1}{2}$，故 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，$-\infty<x<+\infty$。） **作业：** 掌握本次课所讲题目与方法，总习题十一、完成“回顾与预习”.
参考资料（含参考书、文献等）： 《高等数学》(第六版)，同济大学数学系编，高等教育出版社
教学过程设计：复习 80 分钟，授新课 0 分钟，安排讨论 9 分钟，布置作业 1 分钟
授课类型：√理论课　讨论课　实验课　√练习课　其他
教学方式：√讲授　讨论　指导　其他
教学资源：√多媒体　模型　实物　挂图　音像　其他